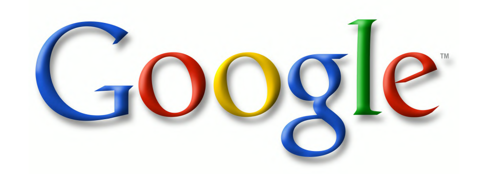
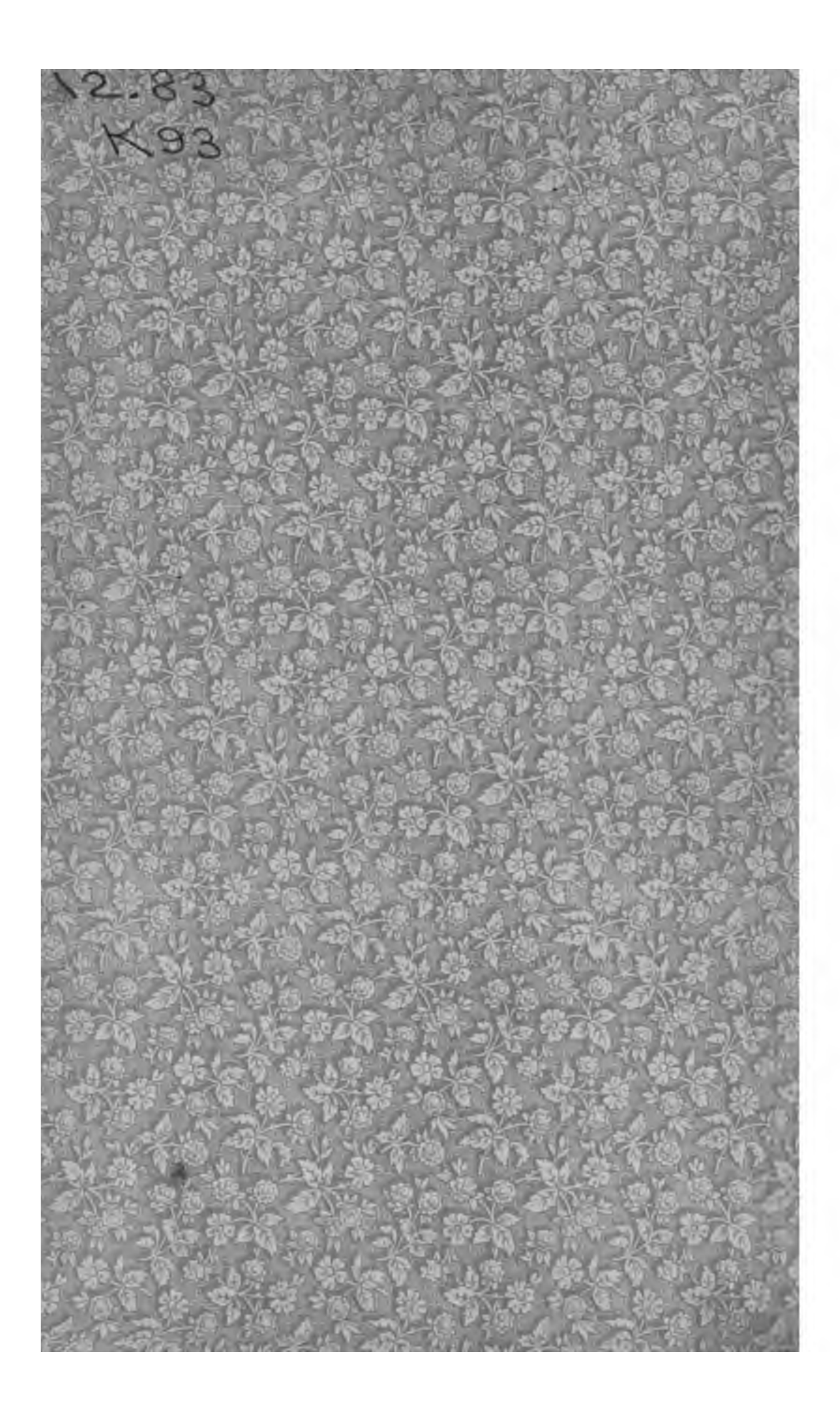






VORLESUNGEN ÜBER
MATHEMATIK

VON

LEOPOLD KRONECKER.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN KOMMISSION.

IN ZWEI TEILEN.

ZWEITER TEIL.

VORLESUNGEN ÜBER
ALLGEMEINE ARITHMETIK.

ZWEITER ABSCHNITT:
VORLESUNGEN ÜBER DETERMINANTENTHEORIE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

VORLESUNGEN ÜBER
DIE THEORIE DER
DETERMINANTEN

VON

LEOPOLD KRONECKER.

BEARBEITET UND FORTGEFÜHRT VON

DR. KURT HENSEL,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT MARBURG.

ERSTER BAND.

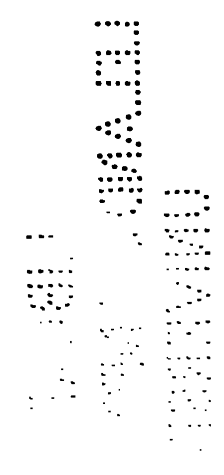
ERSTE BIS EINUNDZWANZIGSTE VORLESUNG.

MIT 11 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.



Vorwort.

Die Vorlesungen über Determinantentheorie, deren ersten Band ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, bildeten den zweiten Teil in dem Cyklus akademischer Vorträge über allgemeine Arithmetik, welche Leopold Kronecker in den Jahren 1883—1891 an der Berliner Universität zu halten pflegte. Der Stoff war in diesen drei Vorlesungen über Zahlentheorie, Determinantentheorie und Algebra so verteilt, daſs jede von ihnen ein Ganzes für sich bildete und ohne Kenntnis der beiden anderen vollständig verstanden werden konnte. Diese Eigenschaft ist auch bei der vorliegenden Herausgabe erhalten geblieben.

Die Determinantentheorie hat sich sowohl bei Lebzeiten Kroneckers und unter seiner erfolgreichen Mitwirkung, als auch in den zwölf Jahren nach seinem Tode so stark und so bedeutsam entwickelt, daſs die bisher veröffentlichten Lehrbücher dieser Disziplin nicht mehr eine vollständige Darstellung ihres reichen Inhaltes geben. In dieser Beziehung bildeten die Universitätsvorlesungen Kroneckers bereits einen wichtigen Fortschritt. Aber auch er hielt die Zeit noch nicht für gekommen, die Resultate seiner eigenen tiefergehenden Untersuchungen, insbesondere über die Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, in seinen Vorlesungen zu geben; ebenso konnte er eine Reihe von Untersuchungen von Frobenius, Minkowski, Hurwitz und anderen Forschern, welche gerade in den letzten Jahren abgeschlossen wurden und die so viel zur Vertiefung und Vereinfachung dieser Theorie beigetragen haben, noch nicht in den Kreis seiner Betrachtungen ziehen.

Eine langjährige eingehende Beschäftigung mit diesen neueren Problemen der Determinantentheorie hat mir aber gezeigt, daſs man gerade diese in besonders einheitlicher und einfacher Weise durch Benutzung und konsequente Ausgestaltung der Gedanken behandeln kann, welche Kronecker in seinen letzten Vorlesungen und Arbeiten über diesen Gegenstand dargelegt hat. Aus diesem Grunde habe ich mich entschlossen, die Vorlesungen Kroneckers unter sorgfältiger Erhaltung seiner Grundprinzipien und unter Benutzung seiner einfachen und wirksamen Methoden so zu bearbeiten und fortzuführen, daſs dieses Werk

eine systematische Darstellung der modernen Determinantentheorie und ihrer wichtigsten Anwendungen enthält.

Für den gröfsten Teil des vorliegenden ersten Bandes konnten nun die Kroneckerschen Vorlesungen selbst der Bearbeitung zu Grunde gelegt werden; ich möchte noch kurz angeben, welche Teile desselben ich neu dargestellt habe, und was die Gründe waren, die mich hierzu bewogen.

Für Kronecker ist die Determinantentheorie ein Teil der allgemeinen Arithmetik, nämlich der, welcher sich mit den Eigenschaften der linearen Funktionen mehrerer Variablen beschäftigt. So kehrte einer der hervorragendsten Forscher in diesem Gebiete am Ende des neunzehnten Jahrhunderts wieder zu derjenigen Auffassung der Determinanten zurück, welche zweihundert Jahre früher ihren Entdecker Leibnitz und seinen Nachfolger Kramer auf die Bildung dieser merkwürdigen Ausdrücke hingeführt hatte; denn auch sie betrachteten dieselben als Zähler und Nenner der Brüche, welche sich bei der Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten ergeben.

Wie einfach, durchsichtig und naturgemäfs sich bei diesem durch Leibnitz gewiesenen Eingange die elementare Theorie der Determinanten aufbaut, wenn der Weg durch die reichen Hilfsmittel der modernen Wissenschaft geebnet wird, das werden die Leser dieses Werkes hoffentlich erkennen. Kronecker legte in seinen Vorlesungen besonderen Wert darauf, diese Einfachheit recht deutlich hervortreten zu lassen; und so gab er vor der Darstellung der allgemeinen Theorie eine sehr eingehende Untersuchung der Determinanten zweiter, dritter und vierter Ordnung und ihrer Anwendungen auf die Geometrie, die Arithmetik und die Formentheorie. So erreichte er, dafs seine Hörer bereits mit dem Determinantenkalkul wohl vertraut waren, wenn er nun dazu überging, aus der Betrachtung der Lösung eines Systemes von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten alle Grundeigenschaften der Determinanten n^{ter} Ordnung mit einem Schlage in Evidenz zu setzen.

Durch die immer erneute Durcharbeitung und Vereinfachung der Deduktion wurde dieser erste Teil der Vorlesung ein Meisterwerk an Klarheit und Einheitlichkeit. Die ersten sechzehn Vorlesungen des vorliegenden Bandes, sowie die beiden ersten Paragraphen der siebzehnten (S. 1—299) wurden im Anschlusse an diese Darstellung Kroneckers bearbeitet. Dagegen wurde der nunmehr noch kurz zu besprechende letzte Teil dieses Bandes von mir hinzugefügt.

Aus der Theorie der linearen Gleichungen ergibt sich das Hauptresultat, dafs die Determinante eine Funktion der n^2 Elemente eines quadratischen Systemes (u_{gh}) ist, welche durch zwei leicht angebbare Eigen-

schaften bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist. Mit seiner Hilfe können alle elementaren Sätze dieser Theorie ohne jede Rechnung erschlossen werden.*) Es liegt nun nahe, statt des quadratischen Systemes ein rechteckiges System oder eine Matrix (u_{ik}) von m Horizontalreihen und n Vertikalreihen zu Grunde zu legen, und nach denjenigen Funktionen $\Theta(u_{ik})$ dieser mn Elemente zu fragen, welche in Bezug auf sie dieselben beiden charakteristischen Eigenschaften besitzen. So gelangt man in konsequenter Erweiterung jener Kroneckerschen Fragestellung zu einem ganz allgemeinen Satze, aus dem sich das Multiplikationstheorem für rechteckige Matrizen, die Sätze über die Unterdeterminanten eines Systemes, die Jacobischen Determinantenrelationen, der Laplacesche Determinantensatz u. a. m. als fast selbstverständliche Folgerungen ergeben.

Die große Zahl dieser Determinantenrelationen läßt sich durch wenige sehr einfache Gleichungen ersetzen, wenn man zugleich mit einem Systeme $U = (u_{pq})$ die sogenannten abgeleiteten Systeme $U^{(2)} = (u_{pq}^{(2)})$, $U^{(3)} = (u_{pq}^{(3)})$, ... einführt, deren Elemente die Unterdeterminanten zweiter, dritter, ... Ordnung von (u_{pq}) sind. Dann kann das allgemeine Multiplikationstheorem durch den Satz ersetzt werden, daß aus jeder Gleichung $UV = W$ für drei beliebige Systeme die n Kompositionsgleichungen $U^{(\varrho)}V^{(\varrho)} = W^{(\varrho)}$ für die abgeleiteten Systeme notwendig folgen.

Durch die Arbeiten neuerer Forscher war das Gebiet der Determinantentheorie in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wesentlich erweitert worden, so daß es jetzt das große Gebiet der Systeme oder Matrizen, die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen, ihre Einteilung in Klassen und die zu ihnen gehörigen Invarianten umfaßt. Besonders durch die großen und gedankenreichen Arbeiten von Stephen Smith und Frobenius wurde das Rechnen mit diesen Systemen so ausgebildet und vereinfacht, daß alle diese kompliziertesten und tiefsten Resultate der Determinantentheorie zu ganz einfachen Sätzen einer Arithmetik werden, welche nur etwas schwerer ist, als die elementare Zahlenlehre.

Ein den Anforderungen der modernen Wissenschaft entsprechendes Lehrbuch der Determinantentheorie darf diese Untersuchungen jetzt um so weniger übergehen, als neuere Arbeiten von Frobenius gezeigt haben, wie wunderbar einfach sich mit ihrer Hilfe die wichtigen und

*) Die beiden charakteristischen Eigenschaften der Determinanten, welche sich hier als eine Folgerung aus der Theorie der linearen Gleichungen ergeben, benutzte Weierstraß schon früher in seinen ersten Vorlesungen über diese Disziplin zur Definition der Determinanten.

schwer beweisbaren Resultate von Weierstraſs und Kronecker über die Äquivalenz von Formenscharen ablesen lassen. Gerade bei diesen Vorlesungen konnte aber auf jene Fragen besonders leicht eingegangen werden, da Kronecker in seinen letzten Arbeiten über diese Disziplin einen Weg zu betreten angefangen hat, auf welchem fortschreitend die hier auftretenden Fragen der höheren Determinantentheorie vielleicht noch einfacher behandelt werden können, als dies früher möglich war.

Kronecker hat in seinen Vorlesungen von vornherein das Multiplikationstheorem für die Matrizen in den Vordergrund gestellt, und zwar nicht nur für die Komposition dieser Systeme, sondern besonders für ihre Dekomposition. Ebenso nämlich, wie sich eine ganze Zahl in ein Produkt von Primfaktoren zerlegen läſst, kann eine Matrix als Produkt einfachster Elementarsysteme dargestellt werden; und diese spielen dann in der Arithmetik der Systeme genau dieselbe Rolle, wie die Primzahlen in der elementaren Zahlentheorie. Bildet man nun die Lehre von diesen Elementarsystemen weiter aus, so lassen sich alle die schönen Sätze von Stephen Smith und Frobenius über die Bedingungen für die Teilbarkeit der Systeme durcheinander und über die verschiedenen Arten der Äquivalenz sowie ihre zahlreichen Anwendungen auf die Formentheorie rein arithmetisch ableiten. Einem Teile dieser Untersuchungen sind die beiden letzten Vorlesungen dieses Bandes gewidmet; dieselben werden im Anfange des zweiten Bandes vollständig durchgeführt werden.

Mit besonderem Danke möchte ich auch an dieser Stelle der Hilfe gedenken, welche mir Herr E. Netto durch die sorgfältige Durchsicht der Korrekturbogen und seine wertvollen kritischen Bemerkungen geleistet hat. Auch Herr Heinrich Jung hat mich bei der Korrektur dieses Bandes in dankenswertester Weise unterstützt.

Möchten diese Vorlesungen, deren Herausgabe und Bearbeitung das Ergebnis mehrjähriger Beschäftigung mit dieser Disziplin gewesen ist, auch anderen deutlich machen, wie naturgemäſs und anwendbar die Prinzipien sind, welche Kronecker in der allgemeinen Arithmetik, diesem seinem eigensten Gebiete, entwickelt hat, und möchten sie Anregung geben zur weiteren Erforschung der hier noch ihrer Lösung harrenden Fragen.

Marburg, den 28. Juli 1903.

K. Hensel.

Inhaltsverzeichnis.

Erste Vorlesung.

Einleitung: Die Determinanten sind ein Werkzeug zur Auflösung linearer Gleichungen.— Ihre Erfindung durch *Leibnitz* und *Cramer*.— *Vandermonde* und *Lagrange*.— *Gaufs* und seine arithmetische Behandlung der Determinanten. — Systematischer Aufbau der Theorie durch *Cauchy, Jacobi* und dessen Schüler. — Die Determinanten als Invarianten. *Cayley* und *Sylvester*.

§ 1.

In der Vorrede zu seinem wertvollen Lehrbuche der Determinanten bezeichnet *Richard Balzer* dieselben als ein „mächtiges Instrument der Algebra und Analysis“. In der Tat waren sie dies ursprünglich und sind es auch heute noch, ja ihre Bedeutung nach dieser Richtung hin ist sogar mit jedem Jahre gröfser geworden. Wären die Determinanten aber weiter nichts als ein wertvolles Werkzeug, so hätten sie eine lediglich formale Bedeutung, und ihr Studium besäfse kein selbständiges wissenschaftliches Interesse; in Wahrheit ist dies nicht der Fall, sondern die jetzige Stellung dieser Theorie in der Gesamtwissenschaft geht weit hinaus über den Zweck, der sie ursprünglich ins Leben rief; in der Tat treten bei den Determinanten zum ersten Male und in ihrer einfachsten Erscheinung Eigenschaften hervor, welche den wichtigsten und höchsten Gebieten der Algebra und Analysis zukommen, und das Studium derselben hat zur Erschliefsung dieser grofsen Bereiche die Anregung und das Vorbild gegeben.

Ursprünglich waren die Determinanten aber wirklich ein Instrument, und in diesem Sinne kann man auch sagen, sie seien nicht wie eine Schöpfung der Natur entdeckt, sondern wie ein wichtiges Werkzeug erfunden worden, und die merkwürdige Geschichte ihrer Entstehung erinnert sehr an diejenige anderer grofser Erfindungen.

Vor ungefähr zweihundert Jahren nämlich wurde *Leibnitz* bei Gelegenheit der Auflösung eines Systems von Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten auf Ausdrücke geführt, welche in einfacher und gesetzmäfsiger Weise aus den Gleichungskoeffizienten zusammengesetzt sind, und welche eben heute Determinanten genannt werden. Mit ihrer Hilfe konnte dann das Resultat der Elimination von n Un-

bekannten aus $(n+1)$ linearen Gleichungen unmittelbar hingeschrieben werden. Nach einer vorbereitenden Mitteilung vom März 1693 setzt *Leibnitz* in einem Briefe vom 28. April desselben Jahres seinem Freunde *l'Hospital* diese neue Erfindung sehr genau auseinander*), gibt eine ausführliche Vorschrift für die Bildung dieser Ausdrücke und spricht sich in diesem und in einem folgenden Briefe dahin aus, dafs er sich von seinem Gedanken für den Fortschritt der Wissenschaft viel verspreche, ja sogar, dafs er ihn für einen der wichtigsten in der Analysis halte. Obwohl nun *Leibnitz* seine Erfindung auch durch den Druck bekannt gemacht hat, besonders in einer Abhandlung, welche im Jahre 1700 in den Acta Eruditorum veröffentlicht worden ist**), und auch hier seine Überzeugung von der Fruchtbarkeit der zu Grunde liegenden Idee nochmals in lebhaften Worten aussprach, so geriet diese dennoch vollständig in Vergessenheit, so vollständig, dafs erst *Dirichlet* diese Erinnerung wieder ans Licht gefördert, und damit nachgewiesen hat, dafs in gewissem Sinne *Leibnitz* als Erfinder der Determinanten anzusehen ist.

Der Grund dafür, dafs eine Erfindung von diesem hohen Werte so vollständig verloren gehen konnte, liegt wohl darin, dafs zu dieser Zeit die Ausbildung der Differential- und Integralrechnung die Kraft und das Interesse der Geometer vollständig absorbierte; die erste Entdeckung dieses gewaltigen Hilfsmittels, welches *Leibnitz* auch ganz in seiner Weise lediglich als ein solches angesehen hat, fiel eben in eine Zeit, als ein Bedürfnis, dasselbe zu benützen, noch nicht vorlag, und infolgedessen geriet sie in Vergessenheit, wie dies ja in der Geschichte der Erfindungen nicht selten geschieht.

So dauerte es denn länger als ein halbes Jahrhundert, bis die Determinanten von *Cramer* wieder entdeckt und in der im Jahre 1750 veröffentlichten „Introduction à l'analyse des Courbes algébriques", Genéve 1750 p. 657 flg. bekannt gemacht wurden. Wenn nun aber auch auf der einen Seite hervorgehoben werden mufs, dafs *Cramer* durch die vollständig vergessene *Leibnitz*sche Erfindung in keiner Weise beeinflufst werden konnte, am allerwenigsten durch die in *Leibnitz'* Brief an *l'Hospital* ausgesprochene Bildungsregel der Determinanten, dafs also seine Erfindung ihm und ihm allein zuzuschreiben ist, so mufs doch anderseits bemerkt werden, dafs auch *Cramer* seine Ausdrücke nicht um ihrer selbst willen, sondern einzig und allein zur Auflösung der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten

*) Lettres à *l'Hospital* (28. April 1693).

**) Acta Eruditorum, Leipzig (1700) p. 206.

studiert hat, also genau denselben Ausgangspunkt genommen und genau denselben Zweck im Auge gehabt hat wie *Leibnitz*. *Cramer* betrachtete nämlich, ähnlich wie dies auch in diesen Vorlesungen zunächst geschehen soll, ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, und zeigte, dafs sich ihre Werte als Quotienten von Koeffizientenausdrücken ergeben, deren Bildungsgesetz er erkannt und in der später so berühmt gewordenen sogenannten *Cramer*schen Regel ausgesprochen hat. Diese Ausdrücke, die späteren Determinanten, waren ihm aber nichts anderes, als ein Mittel zum Zweck, und so fand er es auch nicht nötig, ihnen einen besonderen Namen zu geben.

Von nun an war dafür gesorgt, dafs die einmal gefundenen Resultate nicht wieder in Vergessenheit gerieten; denn abgesehen davon, dafs jetzt die Entwicklungsperiode der Wissenschaft herannahte, in welcher ihre Jünger begannen, sich an formalen Resultaten zu erfreuen, erwachte auch das Bedürfnis nach denjenigen Hilfsmitteln, welche die Determinantentheorie zu geben imstande war, jedoch ging man in den nächsten beiden Menschenaltern noch nicht an die Aufgabe heran, diese Gebilde um ihrer selbst willen systematisch zu behandeln.

In besonders hervorragender Weise wurde die Einsicht in dies Gebiet gefördert durch die ausgezeichneten und auch heute noch im Originale höchst lesenswerten Abhandlungen von *Vandermonde* und *Lagrange*. Der erstere entwickelt in einem „Mémoire sur l'élimination“, das am 12. Januar 1771 der Pariser Akademie vorgelegt und im folgenden Jahre unter ihren Publikationen veröffentlicht wurde*), unter Einführung einer neuen symbolischen Bezeichnung mehrere wichtige Eigenschaften dieser neuen Ausdrücke, und wendet die hier gefundenen Ergebnisse an zur Auflösung linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten, sowie zur Lösung der Aufgabe, aus zwei Gleichungen desselben Grades die Unbekannte zu eliminieren. *Lagrange* beschäftigt sich besonders in der Abhandlung vom Jahre 1773: „Solution analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires“**) zwar ausschliefslich mit speziellen Determinanten, nämlich mit solchen von 9 und 16 Elementen, auf die er durch ein Problem der analytischen Geometrie geführt wird, mit diesen aber so eindringend und ausführlich, dafs jene Arbeit füglich für eine vollständige Darstellung aller hier überhaupt in Betracht kommenden Beziehungen, welche die moderne Theorie gibt, angesehen werden kann.

*) Histoire de l'Académie Royale des sciences, année 72, seconde partie, p. 516.

**) Nouvelles mémoires de l'Académie Royale de Berlin, année 1773, p. 149.

Von ganz anderen Gesichtspunkten als den bis jetzt angegebenen ausgehend wurde *Gauſs* auf diese Ausdrücke hingeführt, und er war es, welcher ihnen den jetzt gebräuchlichen Namen beilegte, wenn auch unter einem ihm eigentümlichen Gesichtspunkte. In der Theorie der quadratischen Formen von zwei und von drei Variablen, also bei einem rein arithmetischen Probleme wurde nämlich *Gauſs* darauf geführt, einen aus den Koeffizienten gebildeten Ausdruck besonders zu bezeichnen, weil von ihm die Haupteigenschaften jener Form vorzüglich abhängen, und er wählte zunächst nur für diese den Namen Determinante (numerus determinans). So beschäftigt sich *Gauſs* im Artikel 154 seiner Disquisitiones arithmeticae bei der Theorie der binären quadratischen Formen im wesentlichen mit den Determinanten von 4 Elementen, während er im Artikel 267 bei Gelegenheit der Untersuchung der ternären quadratischen Formen der Hauptsache nach die Eigenschaften der Determinanten von 9 Elementen darlegt.

Durch die ganz eigentümliche Betrachtung der hier auftretenden Determinanten hat *Gauſs* den Anstoſs zu der arithmetischen Behandlung dieser Theorie, insbesondere für die allgemeine Untersuchung der quadratischen und auch der höheren Formen gegeben, welche heute eine der wichtigsten Anwendungen der Determinantentheorie bildet.

Besonders hervorzuheben ist es aber, daſs *Gauſs* gerade durch seine *Darstellungsweise* einen groſsen Einfluſs auf die späteren Arbeiten in diesem Felde ausgeübt und damit den groſsen Fortschritt vorbereitet hat, welcher besonders durch *Cauchy* und später durch *Jacobi* in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts im wissenschaftlichen Aufbau der Determinantentheorie gemacht worden ist.

Bis jetzt waren nämlich die Determinanten wirklich nur ein reines Werkzeug gewesen, durch dessen Hilfe die Ausführung anderer Arbeiten erleichtert werden sollte; sie waren so bei der Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen, bei dem Problem der Elimination, bei Aufgaben aus der analytischen Geometrie und der Zahlentheorie mit gutem Erfolge benützt, aber niemals weiter vervollkommnet oder eingehender untersucht worden, als es der jedesmal vorliegende Zweck unbedingt erforderte.

Cauchy war der erste, der die Determinanten um ihrer selbst willen eingehend untersuchte und damit den Grund legte zu einer systematischen Entwicklung dieser neuen Theorie. In einer umfangreichen Arbeit, die er am 30. November 1812 im Institut de France las (Mémoire sur les Fonctions, qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre

les variables qu'elles renferment), gibt er eine ausführliche Entwicklung der wichtigsten Sätze über die Determinanten auf Grund einer eingehenden Untersuchung der sogenannten alternierenden Funktionen. Der merkwürdige Umstand, dafs diese grundlegende Abhandlung *Cauchys* seinerzeit fast unbeachtet geblieben ist, läfst sich vielleicht zum Teil auch darauf zurückführen, dafs *Cauchy*, wie dies seine Art war, noch öfter auf diesen Gegenstand in erneuter Behandlung zurückgekommen ist, und es dem Leser hierdurch, sowie auch durch veränderte Bezeichnungen, mitunter etwas erschwert hat, die bleibenden Resultate zu finden. So bezeichnet *Cauchy* in späteren Arbeiten die Determinanten auch als „fonctions alternées“, oder als „resultants“; es sind dies alles sehr geeignete Namen für die Determinanten, da die in ihnen hervorgehobenen Eigenschaften denselben wirklich charakteristisch zukommen, aber es hat stets seine Bedenken, den einmal eingeführten Namen eines Gegenstandes ohne zwingende Gründe zu verändern.

Obwohl somit *Cauchy* die erste systematische Untersuchung der Determinanten durchgeführt hatte, war es doch erst *Jacobi*, der schon seit dem Jahre 1826 die neuen Methoden benützt und sie in wesentlichen Punkten ausgebildet hatte, welcher der Determinantentheorie das Bürgerrecht in der Mathematik erwarb. Den Inhalt seiner hierhergehörigen Untersuchungen und zugleich eine vollständige systematisch geordnete Zusammenfassung der Grundlagen dieser ganzen Theorie legte er in den beiden grofsen Abhandlungen: „De formatione et proprietatibus determinantium“ und „De Determinantibus functionalibus“ nieder und gab ihnen mit seiner gewohnten Präzision und Weitsichtigkeit eine neue Basis; namentlich erscheinen erst von da an Namen und Bezeichnungen im wesentlichen so wie heute.*) Man hat diese als die Grundlage für die Weiterentwicklung der wissenschaftlichen Determinantentheorie anzusehen, und ihr Entstehungsjahr 1841 bezeichnet den Zeitpunkt, in welchem die Determinanten auf festem Grunde in die Wissenschaft eingeführt worden sind.

Von nun an ergiefst sich ein breiter und weit verzweigter Strom von Abhandlungen über diesen Gegenstand, welche sowohl auf den Einflufs jener beiden *Jacobi*schen Abhandlungen, als auch auf die von ihm selbst ausgehende Anregung unmittelbar zurückgeführt werden können; man kann sagen, dafs sich auf der von *Jacobi* geschaffenen Grundlage eine ganze Schule entwickelt hat. So kam es, dafs durch

*) Crelles Journal Bd. 22 p. 285—318, ibid. p. 319—359, Werke Bd. III p. 355—438.

die Arbeiten *Jacobis* und seiner Schüler diese neue Richtung noch eher in Deutschland bekannt und geläufig wurde, als in Frankreich, obwohl sie dort schon ein Menschenalter früher wissenschaftlich begründet worden war.

So grofs war die Popularität dieser neuen Ideeen und so weit ihre Verbreitung, dafs schon im Jahre 1854 ein Lehrbuch der Determinantentheorie erschien, nämlich das sehr lesenswerte Werk des italienischen Mathematikers *Brioschi* „la teoria dei determinanti“ (Pavia); dasselbe gibt eine kurze und präzise Zusammenstellung der Haupteigenschaften der Determinanten; im Jahre 1856 wurde es durch eine deutsche Übersetzung mit einem Vorworte von *Schellbach* weiteren Kreisen zugänglich. Endlich erschien im folgenden Jahre das erste deutsche originale Lehrbuch: „Die Theorie und Anwendung der Determinanten“ von *R. Balzer*. Dieses Werk kann zwar nicht in dem Sinne als Lehrbuch aufgefafst werden, dafs es eine einheitliche systematische Entwicklung des Gegenstandes gibt, aber es ist dadurch von hervorragender Wichtigkeit für die Verbreitung dieser Lehre geworden, dafs es eine knappe, jedoch leicht fafsliche Zusammenstellung der Resultate der Theorie nebst ihrer Herleitung und eine Fülle historischer Notizen enthält. So ist es auch bis auf den heutigen Tag das beste Nachschlagebuch über diesen Gegenstand geblieben, obwohl seitdem in Deutschland und im Auslande eine grofse Zahl kleinerer und gröfserer Lehrbücher der Determinanten erschienen sind, wie z. B. die Werke von *Hesse* (1872), *Dölp*, *Günther* (1875), das sehr kompendiöse von *Mansion* (4e éd. Paris 1883) u. a.

Auch sonst ist seit dieser Zeit die Literatur über diesen Gegenstand mächtig angeschwollen, und jetzt ist die Kenntnis des Determinantenkalkuls, welche um die Mitte des vorigen Jahrhunderts fast nur bei den Schülern *Jacobis* zu finden war, ganz allgemein unter den Mathematikern verbreitet. Eine grofse Menge einzelner formaler Resultate wurden nun gefunden, so dafs es jetzt bereits nicht mehr leicht ist, sie übersichtlich der Theorie einzuordnen. Besonders wurde aber eine Anzahl neuer symbolischer Methoden weit ausgebildet, und es entwickelte sich immer mehr die Hinneigung zu einem Schematismus, welcher den Zweck verfolgt, durch eine einmalige Anstrengung die kontinuierliche Anspannung des Geistes, das Denken, überflüssig zu machen.

§ 2.

Aber so sehr auch gerade in der Theorie der Determinanten die Ausbildung des Schematismus berechtigt ist, da durch ihn ihre Ent-

wicklung erst eigentlich angeregt wurde, so mufs man sich doch immer bestreben, zur Gedankenentwicklung zurückzukehren. Hier sind es nun die Engländer, deren Verdienste in erster Linie zu nennen sind. Sehr bald nach dem Erscheinen der beiden Abhandlungen *Jacobis* hatten sie sich mit Eifer und Glück dieser neuen Theorie zugewandt, und während gerade sie auf der einen Seite den Schematismus sehr weit ausbildeten, waren sie es auch, welche diese Bildungen mit feinem Takte auffafsten und den ihren Beziehungen zu Grunde liegenden gedanklichen Inhalt auffanden, welcher der Keim einer der wichtigsten Begriffe der modernen Mathematik geworden ist.

Es war in den vierziger Jahren, als einige Abhandlungen des englischen Mathematikers *Cayley* über „Hyperdeterminanten" erschienen.*) Dieser Name drückt nicht genau das aus, was *Cayley* mit ihm sagen wollte; in diesen kleinen aber vom historischen Gesichtspunkte aus sehr bedeutungsvollen Aufsätzen ging *Cayley* nämlich von der glücklichen Idee aus, gewisse wesentliche Eigenschaften der Determinanten auch bei anderen algebraischen Gebilden aufzusuchen, und entdeckte so ein gröfseres Gebiet algebraischer Gröfsen mit gemeinsamen charakteristischen Eigenschaften, von dem die Determinanten nur einen Teilbereich bilden. *Cayley* fühlte mit grofsem mathematischen Taktgefühl die wirklich bestimmenden Eigenschaften der Determinanten heraus und begründete durch seine glückliche Verallgemeinerung die Theorie der Invarianten. Diesen Namen hat den *Cayley*schen Hyperdeterminanten der englische Mathematiker *Sylvester* beigelegt, welcher unmittelbar nach *Cayley* und in stetem Zusammenwirken mit ihm seine Grundgedanken mit grofsem Scharfsinn und bedeutendem Erfolge weiter entwickelt hat.

Die Determinanten sind mit die ersten und die einfachsten Invarianten, die in der Geschichte der Mathematik aufgetreten sind; alle Eigenschaften, die für die allgemeinen Invarianten charakteristisch sind, findet man bei ihnen gleichsam in nuce zusammen, und so kann man die Determinanten gedanklich am vollständigsten als die einfachsten Invarianten charakterisieren.

§ 3.

Ein naturgemäfser Eingang in die Theorie der Determinanten wird sich aber nicht unter diesen weiten und höchsten Gesichtspunkten darbieten, da sie ja erst durch das Studium der Determinanten

*) *Cayley* Cambridge mathematical journal t. IV p. 1193, t. VI p. 87.

selbst gewonnen werden können. Die meisten Lehrbücher, wie z. B. *Balzer*, gehen nach dem Vorgange *Cauchys* und *Jacobis* direkt von der allgemeinen Definition der Determinanten aus, um dann aus dieser ihre Eigenschaften zu entwickeln. So einfach und sicher aber auch dieser Weg ist, so ist er historisch nicht begründet, und er dürfte sich auch vom pädagogischen Standpunkt aus schon deshalb nicht empfehlen, weil dem Lernenden nicht die Gründe angegeben werden können, warum gerade diese Gebilde einer Untersuchung unterworfen werden. Der pädagogisch empfehlenswerteste Weg scheint der zu sein, welcher durch die historische Entwicklung der Determinantentheorie selbst gewiesen wird.

Wie wir im Eingange dieser Vorlesung bereits hervorhoben, wurden *Leibnitz* und *Cramer* mit Notwendigkeit auf die Determinanten geführt, als sie ein System linearer Gleichungen auflösen wollten, und so bilden diese Ausdrücke das letzte Glied einer Kette von Abstraktionen, deren Anfang unmittelbar auf *Diophantus* zurückreicht. Er war nämlich — soweit wir wissen — der erste, der für eine unbekannte Gröfse einen Buchstaben, nämlich das Schlufssigma einführte, um sie aus einer vorgelegten Gleichung berechnen zu können. Dagegen vermochte er nicht den weiteren Schritt zu tun, nämlich auch eine zweite Unbekannte ebenfalls durch einen neuen Buchstaben zu bezeichnen, um so in gleicher Weise ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen. Was ihm versagt blieb, leisteten die Araber. Sie bezeichneten auch die anderen etwa noch gesuchten Gröfsen mit Buchstaben und schufen so ein System linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten und mit bestimmten Zahlenkoeffizienten. Ein weiterer Schritt bestand darin, dafs man derartige Gleichungen nicht für bestimmte, sondern für literal gegebene Werte der Koeffizienten betrachtete, wobei aber immer noch die Anzahl der gegebenen Gleichungen eine völlig bestimmte Zahl war. Von dem Augenblicke an, wo auch noch die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten gleich einer beliebigen unbestimmten Zahl n angenommen wurde, ist zu ihrer einheitlichen Lösung die Einführung der Determinanten unmittelbar gefordert.

Aber die moderne Mathematik begnügt sich nicht damit, ein derartiges System von n linearen Gleichungen lediglich aufzulösen, wie dies das einzige Ziel der früheren Untersuchungen war. Sie betrachtet vielmehr die linearen Funktionen, welche die linken Seiten jener Gleichungen bilden, und die Gröfsen, welche aus diesen zusammengesetzt werden können, und damit erhebt sich die moderne Arithmetik weit über die Betrachtung der blofsen Zahlen, welche früher ihr einziges Feld war. Erst in diesem Zusammenhang findet die Theorie

der Determinanten ihre volle Würdigung als der zweite Teil der allgemeinen Arithmetik.

Aus den soeben hervorgehobenen Gründen sollen nun die linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten untersucht werden, um zunächst den Charakter ihrer Lösungen festzustellen. Anstatt aber gleich auf den allgemeinen Fall von n Gleichungen mit n Unbekannten einzugehen, was im wesentlichen ohne besondere Hilfsmittel geschehen könnte, werden wir zuerst die Systeme von zwei und drei Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten einer eingehenden Betrachtung unterwerfen, obwohl diese Aufgaben bereits im Gymnasialunterricht so eingehend behandelt werden, daſs es zunächst schwer erscheinen könnte, noch neue Gedanken an sie anzuknüpfen. Der hier gewählte Eingang hat aber einmal den Vorteil, daſs man bei diesen elementarsten Fragen schon die Probleme und Gesichtspunkte deutlich hervorheben kann, die in der allgemeinen Theorie von prinzipieller Bedeutung sind; dann aber lassen sich bereits an die hier gefundenen Resultate unmittelbar die Anwendungen knüpfen, welche in der analytischen Geometrie von zwei und von drei Dimensionen seit *Lagrange* und in der höheren Arithmetik seit *Gauſs* von den Determinanten gemacht wurden, und die ihrerseits wieder die Anregung geben werden zu entsprechenden geometrischen Untersuchungen innerhalb eines Raumes von n Dimensionen und zu der arithmetischen Betrachtung der linearen und quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen.

Zweite Vorlesung.

Auflösung von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten. — Genauere Formulierung der Aufgabe. — Äquivalenz der Gleichungssysteme. — Die Determinanten zweiter Ordnung. — Darstellung der Lösung eines Gleichungssystemes durch Determinantenquotienten. — Die Koeffizientensysteme oder Matrizen. — Der Rang der Systeme. — Auflösung zweier homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten.

§ 1.

Den Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen bildet die einfache Aufgabe, die beiden unbekannten Gröfsen x und y aus den beiden linearen Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

zu bestimmen. Die sechs Koeffizienten sollen als unbestimmte Gröfsen vorausgesetzt werden; man kann daher jene Aufgabe auch so aussprechen:

Es sollen diejenigen Funktionen der sechs Gröfsen $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ gefunden werden, welche für x und y in die Gleichungen (1) eingesetzt, diese identisch befriedigen.

Der gewöhnliche Weg, aus den Gleichungen (1) die Werte der Unbekannten x und y zu berechnen, besteht bekanntlich darin, dafs man aus ihnen zwei neue sogenannte reduzierte Gleichungen herleitet, von denen die eine nur x, die andere nur y enthält, dafs man also das System (1) auf zwei Gleichungen mit je einer Unbekannten reduziert, die dann unmittelbar aufgelöst werden können. In der Tat gehen so aus (1) die Gleichungen:

$$(2) \qquad (ab' - a'b)\,x = (bc' - b'c), \quad (ab' - a'b)\,y = (ca' - c'a)$$

hervor, aus denen sich für x und y unmittelbar die Werte

$$(2\text{a}) \qquad x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

ergeben. Bei dieser Art der Reduktion mufs jedoch jedesmal die Frage beantwortet werden, ob ebenso wie die abgeleiteten Gleichungen (2)

eine notwendige Folge der ursprünglichen sind, diese auch unbedingt aus jenen hervorgehen, ob also die Lösung der abgeleiteten Gleichungen auch die ursprünglichen befriedigen. Ferner aber würde diese Methode in dem speziellen Falle, wo $ab' - a'b = 0$ ist, zu den Gleichungen

$$(2b) \qquad bc' - b'c = 0, \quad ca' - c'a = 0$$

führen, welche durch keinen Wert von x und y befriedigt werden können, man würde also bei dieser Art der Behandlung das Auftreten sogenannter unmöglicher Gleichungen niemals auszuschliefsen imstande sein.

In der gesamten Mathematik ist es aber von grundlegender Wichtigkeit, dafs eine jede ihrer Fragen von vornherein so gestellt werde, dafs man eine Antwort notwendig erhalten mufs; erst dann kann man sagen, dafs die Frage selbst eine naturgemäfse ist. Zu einer solchen Fragestellung führt in diesem Falle die folgende Überlegung: Fafst man die Gröfsen x und y nicht als bestimmte aber noch unbekannte Gröfsen auf, betrachtet man sie vielmehr, wie dies stets im folgenden geschehen soll, als variable Gröfsen, welche unabhängig voneinander alle positiven und negativen endlichen Zahlenwerte durchlaufen können, so kann man das Problem der Auflösung der beiden Gleichungen (1) folgendermafsen ansprechen:

Welche Beschränkung wird der Veränderlichkeit der beiden Variablen x und y durch die Forderung auferlegt, dafs zwei lineare Funktionen derselben

$$(2c) \qquad \begin{aligned} f &= ax + by + c \\ f' &= a'x + b'y + c' \end{aligned}$$

den Wert Null haben sollen?

Bei dieser Art der Fragestellung mufs man stets eine positive Antwort erhalten, denn gelangt man durch Verbindung der ursprünglichen Gleichungen etwa zu einem Systeme der Form (2b), so wird jetzt eben nur ausgesagt, dafs kein einziges Wertsystem (x, y) in dem gesamten Wertbereich der beiden Variabeln jene beiden Ausdrücke zum Verschwinden bringen kann. Aufserdem läfst sich aber bei dieser Formulierung der Aufgabe auch leicht die Beziehung der ursprünglichen Gleichungen zu den reduzierten feststellen, und damit das erste oben geäufserte Bedenken beseitigen, und gerade diese Untersuchung führt zu einem der wichtigsten Begriffe in diesem Gebiete, dem Begriffe der Äquivalenz der Systeme.

Bildet man nämlich aus den beiden Funktionen (2c) zwei neue homogene lineare Ausdrücke:

$$(3) \qquad \begin{aligned} F &= \alpha f + \alpha' f' \\ F' &= \beta f + \beta' f', \end{aligned}$$

deren Koeffizienten $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ ganz beliebige endliche Konstanten sind, so erkennt man sofort, daſs jedes System (x, y), durch welches f und f' zum Verschwinden gebracht wird, auch F und F' zu Null machen muſs, dagegen braucht das Umgekehrte nicht notwendig der Fall zu sein, wie man z. B. unmittelbar in dem Falle sieht, wo alle Koeffizienten $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ gleich Null sind. Kann man aber auch die Funktionen (f, f') etwa durch Auflösung von (3) homogen und linear durch (F, F') darstellen, so daſs auch

$$(3a) \qquad \begin{aligned} f &= \alpha_1 F + \alpha_1' F' \\ f' &= \beta_1 F + \beta_1' F' \end{aligned}$$

ist, so folgt, daſs auch jedes Wertsystem, welches F und F' zum Verschwinden bringt, auch die beiden Funktionen f und f' zu Null macht. Unter dieser Bedingung wird daher die Variabilität von x und y durch die Bedingungen, daſs entweder die Funktionen (f, f'), oder die Funktionen (F, F') verschwinden sollen, genau in derselben Weise beschränkt; für diese Frage sind also die Funktionenpaare (f, f') und (F, F') absolut äquivalent. Wir wollen diese Beziehung folgendermaſsen schreiben:

$$(f, f') \sim (F, F'),$$

und das bis jetzt erlangte Resultat in dem Satze aussprechen:

> Zwei Paare linearer Funktionen von x und y (f, f') und (F, F') heiſsen **äquivalent**, wenn die Funktionen f und f' homogen und linear durch (F, F') darstellbar sind und umgekehrt. Ist
>
> $$(f, f') \sim (F, F'),$$
>
> so wird die Variabilität von (x, y) durch die beiden „äquivalenten Gleichungssysteme"
>
> $$f = 0, \quad f' = 0 \qquad \text{und} \qquad F = 0, \quad F' = 0$$
>
> genau in der gleichen Weise beschränkt.

Die im Anfange dieses Abschnittes erwähnte Auflösungsmethode der Gleichungen (1) besteht nun einfach darin, daſs das System (f, f') durch ein äquivalentes (F, F') von zwei linearen Funktionen ersetzt wird, von denen die eine nur die Variable x, die andere nur y enthält. Ein solches System soll ein *reduziertes* genannt werden. Hierzu hat man in (3) die noch vollständig willkürlichen Konstanten $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ so zu bestimmen, daſs in F und F' die Koeffizienten von x beziehungsweise von y gleich Null sind. Zu diesem Zwecke braucht man offenbar nur:

$$\alpha = a', \quad \alpha' = -a$$
$$\beta = b', \quad \beta' = -b$$

zu setzen. Dann erhält man an Stelle des ursprünglichen Systemes (f, f') das folgende:

$$(4) \qquad \begin{aligned} F &= a'f - af' = (a'b - ab')y + (a'c - ac') \\ F' &= b'f - bf' = (ab' - a'b)x + (b'c - bc'), \end{aligned}$$

und die Auflösung der beiden „reduzierten Gleichungen" ($F = 0$, $F' = 0$) ergibt dann die in (2a) gefundenen Werte von x und y.

§ 2.

Es fragt sich nun, ob die aus (4) sich ergebenden Lösungen mit denjenigen von den ursprünglichen Gleichungen

$$(1) \qquad f = 0, \quad f' = 0$$

notwendig identisch, d. h. ob die beiden Systeme (f, f') und (F, F') äquivalent sind. Um diese Frage zu entscheiden, lösen wir die vorher gefundenen Gleichungen (4):

$$(1a) \qquad \begin{aligned} F &= a'f - af' \\ F' &= b'f - bf' \end{aligned}$$

nach f und f' auf, indem wir sie, beziehlich mit $(-b, a)$ und mit $(-b', a')$ multipliziert, addieren, und erhalten:

$$(1b) \qquad \begin{aligned} (ab' - a'b)f &= aF' - bF, \\ (ab' - a'b)f' &= a'F' - b'F. \end{aligned}$$

Während also das erste Gleichungssystem (4) besagt, daſs die Gleichungen $F = F' = 0$ eine notwendige Folge sind von $f = f' = 0$, zeigt die zweite nur, daſs aus $F = F' = 0$ nur geschlossen werden kann:

$$(ab' - a'b)f = 0, \quad (ab' - a'b)f' = 0.$$

Ist also der aus den Koeffizienten von x und y gebildete Ausdruck $(ab' - a'b)$ von Null verschieden, so ist in der Tat jede Lösung des einen Gleichungssystems auch eine solche des anderen und umgekehrt, das System (f, f') ist also dem reduzierten (F, F') äquivalent.

Ist dagegen

$$(2) \qquad ab' - a'b = 0,$$

so erkennt man sofort, daſs ein System zu (f, f') äquivalenter reduzierter Funktionen nicht existiert. Soll nämlich

$$F = \alpha f + \alpha' f' = (\alpha a + \alpha' a')x + (\alpha b + \alpha' b')y + (\alpha c + \alpha' c')$$

eine Funktion sein, in welcher der Koeffizient von x gleich Null, der von y aber von Null verschieden ist, so muſs

$$\alpha a + \alpha' a' = 0, \quad \text{also} \quad \alpha = t a' \qquad \alpha' = -t a$$

sein, wo t eine beliebige Gröfse bezeichnet. Dann verschwindet aber unter der Voraussetzung (2) auch der Koeffizient $-t(ab' - a'b)$ von y, man erhält also in diesem Falle keine reduzierte Funktion dieser Art.

Es ergibt sich also der wichtige Satz:

> Das System (f, f') ist dann und nur dann einem reduzierten Systeme (F, F') äquivalent, wenn der aus den Koeffizienten von x und y gebildete Ausdruck
>
> (3) $$ab' - a'b$$
>
> von Null verschieden ist.

Schon hier zeigt sich also der Ausdruck $(ab' - a'b)$, welcher aus den vier Koeffizienten des Systems

(4) $$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$$

in leicht verständlicher Weise gebildet ist, als eine „determinierende" Funktion, weil sie und nur sie darüber entscheidet, ob das ursprüngliche Gleichungssystem durch ein „reduziertes" direkt auflösbares ersetzt werden kann oder nicht. Da derselbe somit den Charakter des Gleichungssystems $(f = 0, f' = 0)$ bestimmt, oder determiniert, so wollen wir ihn als *Determinante* bezeichnen, und ihn, um gerade seine Beziehung zu jenen 4 Gröfsen $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ deutlich hervortreten zu lassen, und auch um seine Entstehungsart aus den Funktionen f und f' zu kennzeichnen, durch:

(5) $$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

bezeichnen. Mitunter soll, wo kein Mifsverständnis zu befürchten ist, jene Determinante auch in der Form

(5a) $$| a, b |$$

geschrieben werden. Die vier Koeffizienten (a, b, a', b') heifsen die Elemente der Determinante. Dieselben sind so geordnet, dafs die Koeffizienten (a, b) und (a', b') einer und derselben Funktion f und f' nebeneinander, d. h. in derselben Horizontalreihe oder Zeile stehen, während die Koeffizienten (a, a') und (b, b') einer und derselben Variablen x und y untereinander, d. h. in derselben Vertikalreihe oder Kolonne stehen. Zeilen oder Kolonnen werden auch als Reihen bezeichnet. Da die Determinante (5) aus zwei Zeilen und zwei Kolonnen gebildet ist, so soll sie eine Determinante zweiter Ordnung genannt werden.

Um aus dem Koeffizientensystem $\begin{pmatrix} a, b \\ a', b' \end{pmatrix}$ seine Determinante zu bilden, multipliziere man die beiden in einer Diagonalreihe stehenden Elemente (a, b') und (b, a') miteinander und ziehe das zweite Produkt von dem ersten ab. Vertauscht man in der Determinante die beiden Horizontalreihen oder die beiden Vertikalreihen, so folgt aus diesem Bildungsgesetze, daſs die Determinante ihrem absoluten Werte nach ungeändert bleibt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen erhält; es ist also:

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b, & a \\ b', & a' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a', & b' \\ a, & b \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} b', & a' \\ b, & a \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Die Reihenfolge der Horizontalreihen und der Vertikalreihen der Determinante ist also nicht auf den absoluten Wert, wohl aber auf das Vorzeichen derselben von Einfluſs.

Es sei nun zunächst die Determinante $ab' - a'b$ von Null verschieden, d. h. es sei das System (f, f') dem reduzierten (F, F') in (4) äquivalent. Löst man dann an Stelle der ursprünglichen Gleichungen (1) die reduzierten:

$$F = 0, \quad F' = 0$$

auf, und berücksichtigt dabei, daſs in ihnen die Koeffizienten von x und y, abgesehen vom Vorzeichen, die nicht verschwindende Determinante $|a, b|$ sind, so erhält man als einzige Lösung dieses und damit auch des ursprünglichen Gleichungssystems die schon oben gefundenen Quotienten

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}. \tag{7}$$

In diesem, dem sogenannten **allgemeinen Falle** besitzt also das Gleichungssystem (1) eine und nur eine Lösung.

Auch die beiden Zähler von x und y lassen sich als Determinanten schreiben, nämlich als diejenigen, welche aus den Koeffizientensystemen

$$\begin{pmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c, & a \\ c', & a' \end{pmatrix}$$

gebildet sind und welche in der oben angegebenen abgekürzten Schreibweise durch $|b, c|$ und $|c, a|$ bezeichnet werden können. Hiernach erhalten die Ausdrücke für x und y die folgende übersichtliche Gestalt

$$x = \frac{|b, c|}{|a, b|}, \quad y = \frac{|c, a|}{|a, b|}. \tag{7a}$$

Diese Lösung kann auch in der Form einer Doppelproportion geschrieben werden:

(7b)
$$x:y:1 = |b, c| : |c, a| : |a, b|$$
$$= (bc' - b'c) : (ca' - c'a) : (ab' - a'b).$$

Setzt man die Werte von x und y, welche die ursprünglichen Gleichungen (1) identisch befriedigen, in dieselben ein, und multipliziert nun mit ihrem gemeinsamen Nenner, so ergeben sich die beiden Identitäten, von deren Richtigkeit man sich auch durch direkte Ausrechnung leicht überzeugen kann:

(7c)
$$\frac{a}{a'}(bc' - b'c) + \frac{b}{b'}(ca' - c'a) + \frac{c}{c'}(ab' - a'b) \equiv 0,$$

wo diese Schreibweise andeuten soll, daſs jene Gleichung sowohl für (a, b, c), als auch für (a', b', c') als Koeffizienten gilt, und das zuerst von *Riemann* eingeführte Zeichen $\equiv$ besagt, daſs jene Gleichungen identisch, d. h. für unbestimmte Werte der 6 Koeffizienten bestehen. In der Symmetrie und Gesetzmäſsigkeit dieser Identität liegt eine groſse ästhetische Befriedigung, welche gerade in diesem Gebiete geweckt und gepflegt werden muſs, obwohl es ein rein formales Resultat ist.

Die drei Determinanten

(8)
$$\begin{vmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c, & a \\ c', & a' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix},$$

welche auf der rechten Seite der Proportion (7b) auftreten, sind die einzigen dem absoluten Werte nach verschiedenen, welche man aus dem Koeffizientensysteme

(9)
$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$$

der linearen Funktionen f und f' bilden kann, und zwar erhält man die Elemente der drei zu x, y und 1 proportionalen Determinanten, wenn man aus dem obigen Systeme beziehlich die Koeffizienten von x, y und 1 fortläſst. Aber auch die Anordnung der Elemente in jenen drei Determinanten $|b, c|$, $|c, a|$, $|a, b|$ ergibt sich in einfacher Weise aus der ersten. Vertauscht man nämlich die Buchstaben (a, b, c) und natürlich auch die gestrichenen Buchstaben so, daſs man jeden von ihnen durch den folgenden, und den letzten wiederum durch den ersten ersetzt, ersetzt man also die Buchstaben (a, b, c) beziehlich durch (b, c, a), so geht die zweite Determinante aus der ersten, die dritte aus der zweiten, die erste wiederum aus der dritten hervor. Eine derartige Vertauschung dreier oder mehrerer Elemente heiſst eine c y k l i s c h e   P e r m u t a t i o n. Um also die zu x, y, 1 proportionalen

Determinanten zu erhalten, hat man der Reihe nach aus dem Koeffizientensysteme (9) die erste, zweite oder dritte Vertikalreihe zu streichen und die übrigen Kolonnen cyklisch anzuordnen.

§ 3.

Aus den soeben durchgeführten Untersuchungen hatte sich ergeben, daſs die Gleichungen (1) eine und nur eine Lösung besitzen, falls die Determinante $(ab' - a'b)$ von Null verschieden, falls also das System (f, f') einem reduzierten äquivalent ist. Es sei nun diese Determinante

$$ab' - a'b = 0;$$

dann ergeben sich aus (4) auf S. 13 für alle Werte der Variablen (x, y) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} F &= a'f - af' = a'c - ac' \\ F' &= b'f - bf' = b'c - bc', \end{aligned} \tag{1}$$

denen sich noch die dritte Gleichung

$$F'' = c'f - cf' = (c'a - ca')x + (c'b - cb')y \tag{1a}$$

an die Seite stellen läſst. Da nun für jedes Wertsystem (x, y), welches f und f' zum Verschwinden bringt, auch F und F' gleich Null ist, so folgt aus (1), daſs unter dieser Voraussetzung jene Gleichungen nur dann eine endliche Lösung haben können, wenn zugleich

$$ab' - a'b = bc' - b'c = ca' - c'a = 0 \tag{2}$$

sind, d. h. wenn auſser $|a, b|$ alle anderen Determinanten $|b, c|$ und $|c, a|$ verschwinden, welche man aus dem Koeffizientensysteme $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ durch Weglassung je einer Kolonne bilden kann. Ist dies aber der Fall, so gehen die drei Gleichungen (1) und (1a) über in

$$a'f = af', \qquad b'f = bf', \qquad c'f = cf'. \tag{2a}$$

Von den sechs Koeffizienten von f und f' möge nun mindestens einer von Null verschieden sein. Ist dies z. B. a, so ergibt sich aus (2a)

$$f' = \frac{a'}{a} f, \tag{2b}$$

und aus den Gleichungen (2) folgt, daſs die beiden anderen Gleichungen

$$f' = \frac{b'}{b} f, \quad f' = \frac{c'}{c} f$$

mit (2b) identisch sind.*) Jede Lösung von $(f = 0)$ ist also auch eine solche von $(f = 0, f' = 0)$ und umgekehrt. Für die Beschränkung der Variabilität besteht also in diesem Falle die Äquivalenz

$$(f, f') \sim (f).$$

*) Wäre etwa $b = 0$, so folgt aus $ab' = a'b$, daſs auch $b' = 0$ sein muſs, daſs dann also die zweite Gleichung in (2a) einfach fortgelassen werden kann.

Sind also alle Determinanten zweiter Ordnung des Systems $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ gleich Null, so ist für die Beschränkung der Variabilität die eine Gleichung, hier $f' = 0$, überflüssig.

Die Gleichung mit zwei Unbekannten

$$f = ax + by + c = 0,$$

welche in diesem Falle den beiden ursprünglichen äquivalent ist, besitzt, wenn nicht beide Koeffizienten (a, b) der Variablen gleich Null sind, eine einfache Mannigfaltigkeit von Lösungen. Ist nämlich, wie oben angenommen wurde, $a \gtrless 0$, so folgt aus ihr

$$x = -\frac{by + c}{a}, \tag{3}$$

während y völlig beliebig bleibt. Sind dagegen a, b gleich Null, während $c \gtrless 0$ ist, so geht $f = 0$ für jedes Wertsystem von (x, y) über in

$$c = 0,$$

eine Gleichung, der durch kein endliches Wertsystem (x, y) genügt werden kann. Ist endlich auch noch c gleich Null, d. h. verschwinden alle Koeffizienten von f und f', so sind x und y durch diese Bedingungen in ihrer Variabilität gar nicht beschränkt, und man erhält alsdann eine zweifache Mannigfaltigkeit von Lösungen.

Die sämtlichen Möglichkeiten, welche sich bei der Auflösung der beiden Gleichungen

$$f = ax + by + c = 0$$
$$f' = a'x + b'y + c' = 0$$

darbieten können, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, wobei bemerkt werden mag, daſs unter der Bezeichnung $(A, B \ldots) \gtrless 0$ oder $(A, B \ldots) = 0$ verstanden werden soll, daſs von den Gröſsen des Systems $(A, B \ldots)$ entweder mindestens eine von Null verschieden ist, oder daſs sie alle verschwinden.

I. $(|a, b|, |b, c|, |c, a|) \gtrless 0$

a) $|a, b| \gtrless 0$	eine einzige endliche Lösung,
b) $|a, b| = 0$	keine endliche Lösung.

II. $(|a, b|, |b, c|, |c, a|) = 0$ — $(a, b, c;\ a', b', c') \gtrless 0$
Eine Gleichung ist überflüssig.

a) $(a, b;\ a', b') \gtrless 0$	eine einfache Mannigfaltigkeit endlicher Lösungen,
b) $(a, b;\ a', b') = 0$	keine endliche Lösung.

III. $(a, b, c;\ a', b', c') = 0$ eine zweifache Mannigfaltigkeit von Lösungen; beide Gleichungen sind überflüssig.

Zunächst ergibt sich aus dieser Zusammenstellung, daſs bei der ursprünglichen Auffassung des Problemes auch hier in den speziellen Fällen Ib und IIb sogenannte unmögliche Gleichungen auftreten. Fragt man aber wieder nach der Beschränkung der Variabilität, welche den Veränderlichen x und y durch die Gleichungen $(f = 0,\ f' = 0)$ auferlegt wird, so ist in jenen beiden Fällen die Antwort einfach die, daſs durch sie eben alle Wertsysteme der Variablen ausgeschlossen werden.

Ferner leitet aber diese Einteilung unmittelbar zu den beiden wichtigsten Begriffen über, welche die moderne Wissenschaft in diesem Gebiete gefunden hat, zu dem Begriffe des Systemes oder der Matrix und dem ihres Ranges. Betrachtet man die sechs Koeffizienten $(a, b, c;\ a', b', c')$ der beiden Funktionen f und f', so ordnen sich diese von selbst einmal in zwei Gruppen zu je dreien, entsprechend den beiden Gleichungen, sodann entspricht jedem Elemente der einen Gruppe ein ganz bestimmtes der anderen, welches in der anderen Funktion denselben Multiplikator x, y oder 1 besitzt. So dürfte die passendste Schreibweise für das Koeffizientensystem unter Berücksichtigung jener beiden Beziehungen die folgende sein

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix};$$

denn hier entsprechen die beiden Horizontalreihen oder Zeilen den zu f und f' gehörigen Koeffizienten, während die drei Vertikalreihen oder Kolonnen die einander zugeordneten Elemente aus jenen beiden Funktionen enthalten. Ein so geordnetes rechteckiges System von Elementen nennt man nach dem Vorbilde der Engländer eine Matrix.

Durch Weglassung je einer Vertikalreihe kann man aus dieser Matrix, wie bereits auf S. 16 erwähnt wurde, genau drei aus verschiedenen Elementen bestehende Determinanten zweiter Ordnung

$$|a, b|, \quad |b, c|, \quad |c, a|$$

ableiten, und durch Weglassung je zweier Kolonnen und je einer Zeile findet man dann die sechs Gleichungskoeffizienten

$$a, b, c;\ a', b', c'$$

selbst. Wir wollen im folgenden auch einen solchen einzelnen Koeffizienten z. B. a mitunter als eine Determinante auffassen und ihn alsdann durch $|a|$ bezeichnen; da dann $|a|$ nur eine Zeile und eine Kolonne

besitzt, so soll sie eine Determinante erster Ordnung genannt werden. Diese Einführung ist nicht bloſs aus formalen Gründen geschehen, sondern jene einfachsten Ausdrücke besitzen in der Tat alle Determinanteneigenschaften, nur sind sie eben hier trivial.

Um die hier zu unterscheidenden Eigenschaften der Matrix $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ in übersichtlicher Weise zu kennzeichnen, stellen wir die folgenden Definitionen auf:

1. Die Matrix $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ ist vom **Range** oder von der **Stufe** zwei, wenn wenigstens eine ihrer Determinanten zweiter Ordnung von Null verschieden ist.
2. Diese Matrix hat den Rang eins, wenn alle ihre Determinanten zweiter Ordnung verschwinden, während mindestens eine Determinante erster Ordnung, d. h. einer der sechs Koeffizienten von Null verschieden ist.
3. Die Matrix ist vom Range Null, wenn alle ihre Elemente verschwinden.

Diese drei Definitionen kann man folgendermaſsen in eine einzige zusammenfassen:

Die Matrix $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ ist vom Range r, wenn mindestens eine ihrer Determinanten r^{ter} Ordnung von Null verschieden ist, während alle ihre Determinanten von höherer als der r^{ten} Ordnung verschwinden. Diese Eigenschaft soll durch die Gleichung

$$R\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix} = r$$

charakterisiert werden, wo r eine der Zahlen $0, 1, 2$ bedeutet.

Mit Hilfe dieses Begriffes lassen sich die Fälle I, II, III der obigen Zusammenstellung in höchst einfacher Weise folgendermaſsen zusammenfassen:

Ist r der Rang des Koeffizientensystemes der beiden Gleichungen $f = 0$, $f' = 0$, so sind $(2 - r)$ von ihnen überflüssig, d. h. jenes System kann durch eines von nur r Gleichungen vollständig ersetzt werden, und ihre Lösungen bilden eine $(2 - r)$-fache Mannigfaltigkeit, falls diese Gleichungen überhaupt endliche Lösungen zulassen.

Ein für die Folge wichtiger spezieller Fall ist der, daſs $c = c' = 0$, daſs also die beiden **homogenen** Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} f &= a\,x + b\,y = 0 \\ f' &= a'x + b'y = 0 \end{aligned}$$

gegeben sind. Ist ihre Determinante $ab' - a'b \gtrless 0$, so haben sie nur die eine selbstverständliche Lösung

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Ist dagegen $|a, b| = 0$, aber mindestens einer der Koeffizienten etwa a von Null verschieden, so ist das System ($f = 0$, $f' = 0$) äquivalent der einen Gleichung

$$f = ax + by = 0,$$

und die vollständige Lösung ist dann

$$x = -bt, \quad y = at,$$

wo t eine Variable bedeutet. Sind alle Koeffizienten gleich Null, so wird die Variabilität von x und y überhaupt nicht beschränkt. Hieraus folgt der Satz, welcher die charakteristische Bedeutung der Determinante erkennen läfst:

> Die beiden homogenen Gleichungen (4) haben dann und nur dann eine Lösung, aufser der selbstverständlichen ($x = 0, y = 0$), wenn ihre Determinante $|a, b|$ verschwindet.

§ 4.

Aus dem soeben gefundenen Satze geht bereits hervor, in wie naher Beziehung der Rang des Koeffizientensystemes zu dem Charakter der Lösungen linearer Gleichungen steht. Noch deutlicher wird dieser Zusammenhang, wenn man an Stelle von zwei nicht homogenen Gleichungen mit zwei Unbekannten zwei homogene Gleichungen mit drei Unbekannten

$$(1)\qquad \begin{aligned} g &= a\,x + b\,y + c\,z = 0 \\ g' &= a'x + b'y + c'z = 0 \end{aligned}$$

untersucht. Fafst man hier (x, y, z) als reelle endliche Variable auf, so kann jede von ihnen unabhängig von den beiden anderen alle positiven oder negativen endlichen Zahlenwerte annehmen. Man sagt dann, die Gesamtheit aller so sich ergebenden Zahlensysteme bildet eine dreifache Mannigfaltigkeit, weil hier drei Gröfsen auftreten, welche unabhängig voneinander alle ihnen zukommenden Werte annehmen. Mit der Anwendung der vorhin benutzten Fragestellung kann man diese Aufgabe jetzt folgendermafsen aussprechen:

In welcher Weise wird die Veränderlichkeit der drei Variablen x, y, z durch die Forderung beschränkt, daß die beiden homogenen Funktionen

$$(1a) \qquad \begin{aligned} g &= a\,x + b\,y + c\,z \\ g' &= a'x + b'y + c'z \end{aligned}$$

gleich Null sein sollen?

Offenbar gehen die beiden homogenen Gleichungen ($g = 0$, $g' = 0$) aus den in (1) auf S. 10 betrachteten, abgesehen von der Bezeichnung der Unbekannten, dadurch hervor, daß man in ihnen

$$x = \frac{x'}{z'}, \quad y = \frac{y'}{z'}$$

setzt und alsdann mit dem gemeinsamen Nenner z' multipliziert. Ein Gleiches wird also auch im allgemeinen von den Lösungen gelten. Da jedoch der Bereich von x und y von vornherein auf endliche Werte beschränkt worden war, so wäre hier der Wert $z' = 0$ auszuschließen, und diese weitere und unsymmetrische Beschränkung der Variabilität von z' führte in der Zusammenstellung auf S. 18 die speziellen Fälle Ib und IIb ein, welche bei homogenen Gleichungen gar nicht auftreten können. Aus diesem Grunde ist es einfacher, die homogenen Gleichungen direkt zu untersuchen.

Aus den Funktionen (1a) kann man nämlich jetzt ein System von drei „reduzierten" Funktionen G_1, G_2, G_3 herleiten, von denen jede nur zwei Variable homogen enthält; bildet man nämlich drei homogene Funktionen von g und g', in denen beziehlich x, y und z nicht auftritt, so erhält man

$$(2) \qquad \begin{aligned} G_1 &= ag' - a'g = |a, b|\,y - |c, a|\,z \\ G_2 &= bg' - b'g = |b, c|\,z - |a, b|\,x \\ G_3 &= cg' - c'g = |c, a|\,x - |b, c|\,y. \end{aligned}$$

Ist nun zunächst der Rang der aus den Koeffizienten von g und g' gebildeten Matrix

$$(3) \qquad (M) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$$

gleich zwei, so ist das System (g, g') dem reduzierten (G_1, G_2, G_3) äquivalent, d. h. die Variabilität von (x, y, z) wird in beiden Fällen durch die zugehörigen Gleichungen genau in der gleichen Weise beschränkt. Ist nämlich auch nur eine der drei Determinanten zweiter

Ordnung von (M), etwa $|b, c|$, von Null verschieden, so ergibt sich durch Auflösung der beiden letzten Gleichungen in (2) nach g und g'

$$(4)\qquad \begin{aligned} |b, c| . g &= c\, G_2 - b\, G_3 \\ |b, c| . g' &= c'\, G_2 - b'\, G_3 . \end{aligned}$$

Multipliziert man ferner die Gleichungen (2) mit den Determinanten $|b, c|$, $|c, a|$, $|a, b|$ und addiert sie dann, so folgt wegen (7c) auf S. 16

$$(4a)\qquad |b, c|\, G_1 + |c, a|\, G_2 + |a, b|\, G_3 \equiv 0.$$

Jedes Wertsystem (x, y, z) also, welches g und g' zu Null macht, bringt nach (2) auch G_2, G_3 zum Verschwinden, und aus (4) folgt das Umgekehrte. Es ist also

$$(g, g') \sim (G_2, G_3).$$

Da endlich wegen (4a) jede Lösung der Gleichungen $(G_2 = 0,\ G_3 = 0)$ auch G_1 zum Verschwinden bringt, da also durch die Hinzunahme der Gleichung $G_1 = 0$ die Variabilität von (x, y, z) nicht weiter beschränkt wird, so ist wirklich

$$(g, g') \sim (G_1, G_2, G_3).$$

Die Gleichungen (2) kann man nun leicht vollständig auflösen. Ist nämlich t eine neue unabhängige Variable, so folgt zunächst aus der letzten Gleichung

$$x = |b, c|\, t, \qquad y = |c, a|\, t,$$

und durch Einsetzen dieser Werte in die erste und zweite Gleichung

$$(5)\qquad x = |b, c|\, t, \quad y = |c, a|\, t, \quad z = |a, b|\, t,$$

oder in Form einer Proportion geschrieben

$$(5a)\qquad x : y : z = |b, c| : |c, a| : |a, b|,$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit man a posteriori unmittelbar aus den Identitäten (7c) auf S. 16 erschliefsen kann.

> Ist also die aus den Koeffizienten gebildete Matrix vom Range zwei, so sind die Werte der Lösungen durch **eine** unabhängige Variable t eindeutig bestimmt, dieselben bilden also eine einfache Mannigfaltigkeit.

Aus der symmetrischen, einfachen, übersichtlichen Form dieses Resultates erkennt man schon hier den Wert der Einführung der Determinanten, aber auch die Wichtigkeit der richtigen Bezeichnung der Gleichungskoeffizienten.

Ist der Rang jener Matrix nicht gleich zwei, so verschwinden die drei reduzierten Funktionen G_1, G_2, G_3 identisch. Ist jene Matrix

vom Range eins, ist also auch nur einer der sechs Koeffizienten von g und g', etwa a, von Null verschieden, so folgt aus der ersten Gleichung (2)

(6) $$g' = \frac{a'}{a} g,$$

d. h. jede Lösung von $(g = 0)$ ist auch eine solche von $(g = 0, g' = 0)$ oder es ist

$$(g, g') \sim (g).$$

Nun verschwindet aber g offenbar für beliebige Werte von y und z, unter der Annahme

(6a) $$x = -\frac{1}{a}(by + cz).$$

Ist also das Koeffizientensystem (M) vom Range eins, so ist von den zwei Gleichungen $(g = 0,\ g' = 0)$ eine überflüssig; die Werte ihrer Lösungen sind durch zwei unabhängige Variable (y, z) eindeutig bestimmt, dieselben bilden also eine zweifache Mannigfaltigkeit.

Sind endlich alle Koeffizienten von g und g' gleich Null, so sind beide Gleichungen überflüssig, da die Variabilität von (x, y, z) durch sie gar nicht beschränkt wird; die Lösungen bilden also eine dreifache Mannigfaltigkeit.

Alle diese Resultate lassen sich in dem einen Satze zusammenfassen:

Ist der Rang der aus den Koeffizienten zweier homogenen Gleichungen

$$g = a\,x + b\,y + c\,z = 0$$
$$g' = a'x + b'y + c'z = 0$$

gebildeten Matrix gleich r, so besitzen sie eine $(3-r)$fache Mannigfaltigkeit von Lösungen, und $2 - r$ dieser Gleichungen sind für die Beschränkung der Variabilität von (x, y, z) überflüssig. Das System $(g = 0,\ g' = 0)$ ist also äquivalent einem solchen von zwei Gleichungen oder nur einer Gleichung, je nachdem das Koeffizientensystem vom Range zwei oder eins ist.

Eine für die Folge wichtige Bemerkung mag gleich hier angeknüpft werden. Da die Lösungen der beiden Gleichungen $(g = 0, g' = 0)$ mindestens eine einfache Mannigfaltigkeit bilden, so besitzen sie stets eine gemeinsame Lösung, außer der trivialen $(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$. Bezeichnet man eine solche Lösung, in der nicht alle drei Unbekannte gleich Null sind, als eine wesentliche, so kann man also den folgenden Satz aussprechen:

Zwei homogene Gleichungen mit drei Unbekannten besitzen stets eine wesentliche Lösung.

Dritte Vorlesung.

Geometrische Anwendungen der Determinanten zweiter Ordnung. — Die Schnittfigur zweier geraden Linien. — Äquivalenten Gleichungssystemen entspricht dieselbe Schnittfigur. — Die Schnittfigur zweier geraden Linien ist ein Punkt oder eine Gerade, je nachdem ihr Koeffizientensystem vom Range zwei oder eins ist. — Die Schnittfigur zweier durch den Anfangspunkt gelegten Ebenen ist eine Gerade, eine Ebene, oder der ganze Raum, je nachdem ihr Koeffizientensystem vom Range zwei, eins oder Null ist. — Inhaltsbestimmung eines Dreiecks und eines beliebigen n-Ecks. — Das Multiplikationstheorem für Determinanten zweiter Ordnung.

§ 1.

Die in der vorigen Vorlesung eingeführten Begriffe der Äquivalenz von Gleichungssystemen und des Ranges von Matrizen finden eine wichtige Anwendung in der analytischen Geometrie, und zugleich tritt die Bedeutung dieser rein arithmetischen Begriffe hier noch deutlicher hervor.

Faſst man jedes Zahlenpaar (x, y) als Abscisse und Ordinate eines Punktes in Bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem auf, so wird in der analytischen Geometrie durch elementare Betrachtungen nachgewiesen, daſs alle Lösungen (x, y) einer linearen Gleichung

$$(1) \qquad f = ax + by + c = 0$$

den sämtlichen Punkten P einer ganz bestimmten geraden Linie l entsprechen, und daher heiſst $f = 0$ die Gleichung jener Geraden. Nur in dem singulären Falle, wo alle Koeffizienten (a, b, c) gleich Null sind, genügen selbstverständlich die Koordinaten eines jeden Punktes der Ebene der Gleichung $0 = 0$; man könnte daher sagen, daſs alsdann die ganze Ebene durch sie dargestellt wird. Der leichteren Übersicht wegen soll für die nächsten Überlegungen dieser triviale Fall ausgeschlossen werden, ebenso soll auch der andere Fall nicht betrachtet werden, daſs $a = b = 0$, aber $c \gtrless 0$ ist; denn der dann sich ergebenden Gleichung

(1a) $$c = 0$$

genügt kein einziges endliches Wertsystem (x, y), und daher wird (1a) bekanntlich als die Gleichung der unendlich fernen Geraden interpretiert, welche keinen einzigen im Endlichen liegenden Punkt enthält. Man erkennt aber leicht, daſs die im folgenden abgeleiteten Resultate auch auf diese beiden ausgeschlossenen Fälle angewendet werden können.

Betrachtet man nun wie vorher die beiden Gleichungen

(2) $$\begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c = 0 \\ f' &= a'x + b'y + c' = 0, \end{aligned}$$

so entsprechen ihnen zwei im Endlichen liegende gerade Linien l und l', und die vorhin gestellte Frage, in welcher Weise durch jene Gleichungen die Variabilität von x und y beschränkt wird, kann hier offenbar folgendermaſsen ausgesprochen werden:

> Es sollen alle den beiden Geraden l und l' gemeinsamen Punkte bestimmt werden.

Zwei gerade Linien können entweder einen einzigen im Endlichen oder, falls sie parallel sind, im Unendlichen liegenden Punkt gemeinsam haben, oder aber sie fallen zusammen. In jedem Falle ist ihre Schnittfigur durch das Gleichungssystem (2) vollständig bestimmt, und es handelt sich darum, aus der Natur des zugehörigen Koeffizientensystemes zu erschlieſsen, welcher unter jenen möglichen Fällen eintritt.

Betrachtet man nun anstatt der Gleichungen (2) ein anderes Gleichungssystem

(3) $$\begin{aligned} F &= \alpha f + \alpha' f' = 0 \\ F' &= \beta f + \beta' f' = 0, \end{aligned}$$

so stellen auch sie stets zwei gerade Linien L und L' dar, und aus (3) geht hervor, daſs jeder gemeinsame Punkt von l und l' auch ein solcher von L und L' ist, daſs also jedenfalls die Schnittfigur von (l, l') einen Teil der Schnittfigur von (L, L') bildet. Indessen folgt daraus noch keineswegs, daſs beide Geradenpaare dieselbe Schnittfigur besitzen, hierzu müſste vielmehr auch umgekehrt gezeigt werden können, daſs auch die Schnittfigur von (L, L') ein Teil derjenigen von (l, l') ist. In der Tat, sind z. B. l und l' zwei verschiedene sich kreuzende Geraden, während L und L' zwei zusammenfallende Linien sind, welche durch den Schnittpunkt des ersten Paares hindurchgehen, so ist der erste Schnittpunkt wirklich nur ein Teil der Schnittlinie, welche L und L' gemeinsam ist. Sollen aber beide Gleichungen (2) und (3) dasselbe Lösungssystem haben, so müssen die beiden Systeme $(f = 0,\ f' = 0)$ und $(F = 0,\ F' = 0)$ äquivalent, d. h. es muſs die

Determinante $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ von Null verschieden sein. Man erhält also den Satz:

> Äquivalente Gleichungssysteme ($f = 0$, $f' = 0$) und ($F = 0$, $F' = 0$) stellen gerade Linien dar, welche dieselbe Schnittfigur besitzen.

Bei der in der vorigen Vorlesung auseinandergesetzten Auflösungsmethode der Gleichungen (2) wird nun, falls die Determinante $|a, b| \gtrless 0$ ist, jenes System durch ein äquivalentes reduziertes

$$F = |a, b|\, y - |c, a| = 0$$

$$F' = |a, b|\, x - |b, c| = 0$$

ersetzt, dessen Gleichungen nur je eine Koordinate enthalten, und diese entsprechen zwei Geraden, welche bezw. der x- und der y-Achse parallel durch den Schnittpunkt von l und l' gezogen sind. Die bei der Auflösung der Gleichungen (2) befolgte Methode kommt also darauf heraus, daſs man jenen Schnittpunkt durch die Parallelen L und L' auf die beiden Achsen projiziert und dann die Abscissen der beiden Projektionspunkte aufsucht, d. h. diese Methode stimmt genau mit dem in der analytischen Geometrie stets angewandten Verfahren überein.

Der im vorigen Abschnitte eingeführte Begriff des Ranges besitzt nun ebenfalls eine einfache geometrische Bedeutung. Um diese deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir das der Untersuchung zu Grunde gelegte Koordinatensystem als rechtwinklig voraussetzen und die beiden Gleichungen f und f' von vornherein in der sogenannten *Hesse*schen Normalform annehmen, bei welcher jeder ihrer Koeffizienten eine leicht angebbare geometrische Bedeutung hat.

Ist nämlich l eine beliebige Gerade, p ihr senkrechter Abstand vom Koordinatenanfangspunkte und $\alpha = (x, p)$ der Winkel, welchen p mit der positiven x-Achse macht, so ist ihre Gleichung bekanntlich

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.$$

Ist die Gleichung von l in der Form gegeben

$$ax + by + c = 0,$$

so gelangt man dadurch zu dieser Normalform, daſs man sie mit dem Faktor $\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ multipliziert, wobei das Vorzeichen von λ entgegengesetzt dem von c, also so zu wählen ist, daſs das konstante Glied negativ wird.

Führt man nun die Gleichungen

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

durch Multiplikation mit den beiden Konstanten λ und λ' in ihre Normalformen

$$(4) \qquad \begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p &= 0 \\ x\cos\alpha' + y\sin\alpha' - p' &= 0 \end{aligned}$$

über, so ändert sich der Rang des zugehörigen Koeffizientensystemes nicht, denn in den beiden Systemen

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a\lambda, & b\lambda, & c\lambda \\ a'\lambda', & b'\lambda', & c'\lambda' \end{pmatrix}$$

unterscheiden sich die entsprechenden Determinanten zweiter Ordnung nur durch den Faktor $\lambda\lambda'$ und die Determinanten erster Ordnung durch λ oder λ', welche sämtlich endlich und von Null verschieden sind.

Da nun in dem Gleichungssysteme (4) nicht alle Koeffizienten verschwinden können, so sind hier nur die beiden Fälle zu unterscheiden, daſs das Koeffizientensystem

$$(4a) \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha, & -p \\ \cos\alpha', & \sin\alpha', & -p' \end{pmatrix}$$

vom Range zwei oder vom Range eins ist. Dasselbe ist dann und nur dann vom Range zwei, wenn von den drei Determinanten zweiter Ordnung

$$\sin(\alpha - \alpha'), \qquad p\cos\alpha' - p'\cos\alpha, \qquad p\sin\alpha' - p'\sin\alpha,$$

welche aus ihm gebildet werden können, mindestens eine von Null verschieden ist, und hier bieten sich leicht die folgenden Fälle dar:

I. Das System (4a) ist vom Range zwei,

a) wenn $\sin(\alpha - \alpha') = \sin(p, p') \gtrless 0$ ist, wenn also p und p' weder die gleiche noch die entgegengesetzte Richtung haben. Offenbar haben beide Geraden dann einen im Endlichen liegenden Schnittpunkt.

b) wenn $\sin(\alpha - \alpha') = 0$, also $\alpha' = \alpha$ oder $\alpha' = \alpha + \pi$ ist, d. h. l und l' parallel laufen, während $p\cos\alpha' - p'\cos\alpha$ und $p\sin\alpha' - p'\sin\alpha$ nicht beide Null sind. Ersetzt man dann aber in jenen beiden Ausdrücken $\cos\alpha'$ und $\sin\alpha'$ durch $\pm\cos\alpha$ und $\pm\sin\alpha$, je nach den beiden unterschiedenen Fällen, so gehen sie über in

$$(p \mp p') \cos \alpha \quad \text{bezw.} \quad (p \mp p') \sin \alpha,$$

und diese könnten, da p und p' beide nicht negativ sind, nur dann zugleich verschwinden, wenn $p = p'$ ist, wenn also l und l' zusammenfielen. In diesem Falle sind also l und l' parallel, ohne zusammenzufallen.

II. Das System ist vom Range eins, wenn jene drei Determinanten zweiter Ordnung Null sind, und dieser Fall tritt nach den soeben gemachten Bemerkungen dann und nur dann ein, wenn l und l' zusammenfallen.

Überträgt man also dieses Ergebnis auf das ursprüngliche Koeffizientensystem, so ergibt sich der einfache Satz:

Ist das Koeffizientensystem $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ von zwei linearen Gleichungen ($f = 0$, $f' = 0$) vom Range zwei, so stellen sie stets zwei nicht zusammenfallende gerade Linien dar, welche einander dann und nur dann parallel laufen, wenn die Determinante $(ab' - a'b)$ gleich Null ist. Ist dagegen jenes System vom Range eins, so fallen beide Geraden zusammen.

Noch deutlicher tritt die geometrische Bedeutung des Ranges bei der Interpretation der homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten

$$(5) \qquad \begin{aligned} g &= a\,x + b\,y + c\,z = 0 \\ g' &= a'x + b'y + c'z = 0 \end{aligned}$$

und ihrer Lösungen hervor. Faßt man jetzt nämlich jedes Wertsystem (x, y, z) als die Koordinaten eines Punktes P im Raume auf, so entsprechen bekanntlich alle Lösungen jener Gleichungen den sämtlichen Punkten zweier Ebenen E und E', welche beide durch den Anfangspunkt $(0, 0, 0)$ hindurchgehen. Nur in dem trivialen Falle, daß alle Koeffizienten a, b, c von g verschwinden, wird jener Gleichung durch alle Punkte des ganzen Raumes genügt. Den gemeinsamen Lösungen beider Gleichungen entspricht auch hier die Schnittfigur beider Ebenen; dieselbe ist eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade oder eine Ebene, je nachdem beide Ebenen sich schneiden oder zusammenfallen; endlich ist die Schnittfigur, der ganze Raum, wenn alle sechs Koeffizienten von f und f' gleich Null sind. Vergleicht man dieses Ergebnis der geometrischen Anschauung mit der vorher durchgeführten Rechnung, so ergeben sich die Sätze:

I. Ist das Koeffizientensystem $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ vom Range zwei, so haben die beiden zugehörigen Gleichungen (5) eine einfache

Mannigfaltigkeit von Lösungen gemein, und hier schneiden sich die beiden Ebenen E und E' in einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, deren Gleichungen sind

$$x : y : z = |b, c| : |c, a| : |a, b|.$$

II. Ist das Koeffizientensystem vom Range eins, so fallen beide Ebenen zusammen und haben somit eine zweifache Mannigfaltigkeit von gemeinsamen Punkten.

III. Ist jenes Koeffizientensystem vom Range Null, so haben die Gleichungen (5) eine dreifache Mannigfaltigkeit von Lösungen.

Auch in diesem Falle ist die vorher geschilderte Auflösungsmethode der beiden Gleichungen genau diejenige, welche in der analytischen Geometrie angewandt wird. Haben jene Ebenen nämlich eine durch den Anfangspunkt gehende Schnittlinie gemeinsam, so bestimmt man ihre Lage dadurch, daſs man ihre drei Projektionen auf die Koordinatenebenen aufsucht, welche selbst drei in diesen Ebenen durch den Anfangspunkt gehende Linien sind; von ihnen reichen stets zwei zur Bestimmung jener Geraden hin, die dritte ist durch sie eindeutig bestimmt. In der auf S. 22 auseinandergesetzten Theorie wurde das System ($g_1 = 0$, $g_2 = 0$) ersetzt durch das äquivalente reduzierte System von drei Gleichungen

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = 0,$$

und sie sind die Gleichungen der drei durch l hindurchgelegten Projektionsebenen, weil sie l enthalten und von je einer der drei Koordinaten unabhängig sind; oder, was dasselbe ist, sie sind die Projektionen von l auf den Koordinatenebenen. Auch hier folgt aus der Identität

$$|b, c|\, G_1 + |c, a|\, G_2 + |a, b|\, G_3 \equiv 0,$$

daſs durch zwei von diesen Projektionen die dritte eindeutig bestimmt ist.

§ 2.

Die deutlichste geometrische Veranschaulichung der Determinante selbst erhält man bei der Untersuchung des Flächeninhaltes ebener, geradlinig begrenzter Figuren, speziell bei der Inhaltsbestimmung der Dreiecke aus den Koordinaten ihrer Eckpunkte. Es seien

$$(\xi_1, \eta_1), \quad (\xi_2, \eta_2), \quad (\xi_3, \eta_3)$$

die Koordinaten von drei Punkten $1, 2, 3$, bezogen auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem, welches jedoch zunächst so an-

genommen werden mag, daſs das Dreieck ganz in seinem ersten Quadranten liegt, daſs also alle seine Koordinaten positive Zahlen sind, so gelangt man zu der gesuchten Inhaltsbestimmung des Dreiecks (1, 2, 3) auf folgendem Wege: Fällt man von den drei Eckpunkten die Lote (1, I), (2, II), (3, III) auf die x-Achse, so erhält man drei Paralleltrapeze (1, 2, II, I), (2, 3, III, II), (3, 1, I, III), welche durch je eine Dreiecksseite, ihre Projektion auf die x-Achse, und die beiden zugehörigen Lote begrenzt werden, und deren Inhalte aus den Koordinaten der entsprechenden Dreiecksecken leicht berechnet werden können. Setzt man nämlich

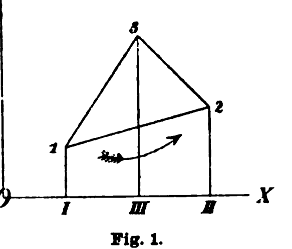


Fig. 1.

$$T_{12} = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 + \eta_2),$$

so stellt dieses Produkt eine Zahl dar, deren absoluter Wert gleich dem Inhalte

$$\frac{1}{2} \cdot (\mathrm{I}, \mathrm{II}) [(1\,\mathrm{I}) + (2\,\mathrm{II})]$$

des einen Trapezes (1, 2, II, I), und deren Vorzeichen positiv oder negativ ist, je nachdem $\xi_1 - \xi_2 \gtrless 0$, d. h. je nachdem bei einem Umlaufe um das Trapez in der Richtung (1, 2, II, I) das Innere desselben links oder rechts liegt. Bildet man nun dieselben Ausdrücke T_{23} und T_{31} für das zweite und das dritte Trapez und aus ihnen die Summe

$$(1)\quad \begin{aligned} \Delta = T_{12} + T_{23} + T_{31} &= \frac{1}{2}[(\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 + \eta_2) + (\xi_2 - \xi_3)(\eta_2 + \eta_3) + (\xi_3 - \xi_1)(\eta_3 + \eta_1)] \\ &= \frac{1}{2}[\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 + \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3], \end{aligned}$$

so heben sich aus ihr alle Flächenteile mit Ausnahme des gesuchten Dreiecks fort, weil sie in jener Summe zweimal aber mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten. Die zum Dreieck selbst gehörigen Teile dagegen kommen einmal und nur einmal vor, und zwar mit dem positiven oder mit dem negativen Vorzeichen, je nachdem in dem zugehörigen Trapeze das Innere desselben links oder rechts liegt. Da aber für diese Trapeze ihr Inneres mit dem Dreiecksinneren zusammenfällt, so kommen diese Stücke mit dem positiven oder negativen Zeichen vor, je nachdem bei einem Umlaufe um das Dreieck in der Richtung 12, 23, 31 oder (1, 2, 3) das Innere desselben links oder rechts liegt. Wir wollen die Umlaufsrichtung (1, 2, 3) positiv oder negativ nennen, je nachdem bei ihr das Innere des Dreiecks links oder rechts sich befindet. Dann stellt die Summe Δ in (1) den Dreiecksinhalt dar, aber mit dem positiven oder dem negativen Vorzeichen, je nachdem die Umlaufsrichtung (1, 2, 3) um das Dreieck positiv oder negativ ist.

In dem vorher gefundenen Ausdruck für 2Δ kann man jedes der drei Aggregate in Form einer Determinante schreiben; tut man das, so ergibt sich

$$(1a) \qquad 2\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2 \\ \eta_1, & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_2, & \xi_3 \\ \eta_2, & \eta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_3, & \xi_1 \\ \eta_3, & \eta_1 \end{vmatrix},$$

aber man erkennt auch leicht, daſs derselbe sich folgendermaſsen auch als eine einzige Determinante darstellen läſst

$$(1b) \quad 2\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_3, & \xi_2 - \xi_3 \\ \eta_1 - \eta_3, & \eta_2 - \eta_3 \end{vmatrix} = (\xi_1 - \xi_3)(\eta_2 - \eta_3) - (\xi_2 - \xi_3)(\eta_1 - \eta_3),$$

in welcher nur die Differenzen der Koordinaten auftreten. Aus dieser letzten Form geht hervor, daſs Δ auch den Inhalt unseres Dreiecks mit dem oben angegebenen Vorzeichen darstellt, wenn dasselbe nicht im ersten Quadranten liegt, da man es ja in diesem Falle durch eine parallele Verschiebung der Abscissen- und der Ordinatenachse dorthin bringen kann, und da sich der Ausdruck (1b) bei jeder von beiden Verschiebungen nicht ändert, weil in ihm nur die Differenzen der Abscissen bezw. Ordinaten auftreten.

Aus diesem wichtigen Satze kann man eine ganze Reihe von Folgerungen ziehen: Sind wieder (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) die Koordinaten zweier beliebigen Punkte, und ist l die durch beide bestimmte gerade Linie, so wird ein Punkt P dann und nur dann auf l liegen, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks $(P, 1, 2)$ gleich Null ist; seine Koordinaten (x, y) müssen demnach der Gleichung

$$2\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2 \\ \eta_1, & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_2, & x \\ \eta_2, & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x, & \xi_1 \\ y, & \eta_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x(\eta_1 - \eta_2) - y(\xi_1 - \xi_2) + \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$$

genügen. Dieses ist also die Gleichung der durch die beiden Punkte $(1, 2)$ bestimmten geraden Linie.

Fällt die dritte Ecke mit dem Anfangspunkte zusammen, sind also ihre Koordinaten $\xi_3 = \eta_3 = 0$, und bezeichnet man dann jene dritte Ecke durch 0, so erhält man für den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $(0, 1, 2)$ mit dem oben bestimmten Vorzeichen den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1 \\ \xi_2, & \eta_2 \end{vmatrix},$$

und dies ist wohl die einfachste und anschaulichste geometrische Darstellung der Determinante, welche es gibt.

Gehen wir endlich zu einem n-Eck über, dessen Ecken $1, 2, \ldots n$ die Koordinaten $(\xi_1, \eta_1), \ldots (\xi_n, \eta_n)$ haben mögen; wir nehmen wiederum das Koordinatensystem so gewählt an, daß das Polygon ganz im ersten Quadranten liegt, und setzen weiter voraus, daß es sich nirgends durchsetzt. Projizieren wir dann seine sämtlichen Eckpunkte auf die x-Achse und nennen die Projektionen $P_1, \ldots P_n$, so erhalten wir jetzt n Paralleltrapeze $(i, i+1, P_i, P_{i+1})$, durch deren Inhalte wir auch hier den des gesuchten Polygones darstellen können. Führt man nämlich wieder die Zahlen $T_{12}, T_{23}, \ldots T_{n1}$ durch die Gleichungen

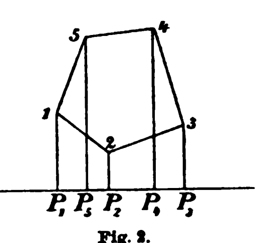


Fig. 2.

$$2\,T_{i,i+1} = (\xi_i - \xi_{i+1})(\eta_i + \eta_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ein, so gibt auch jetzt die Summe

$$2P = 2\sum_{i=1}^{n} T_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i+1})(\eta_i + \eta_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \xi_i\ , & \eta_i \\ \xi_{i+1}, & \eta_{i+1} \end{vmatrix}$$

durch ihren absoluten Wert den doppelten Inhalt unseres Polygons und durch ihr Vorzeichen an, ob die Umlaufsrichtung $(1, 2, \ldots n)$ die positive oder die negative ist. Durch dieselbe Überlegung, wie vorher im Falle des Dreiecks, überzeugt man sich endlich, daß die Beschränkung, das Polygon solle im ersten Quadranten liegen, entbehrlich ist.

§ 3.

Die im § 1 der zweiten Vorlesung dargelegte Methode zur vollständigen Auflösung der beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c = 0 \\ f' &= a'x + b'y + c' = 0 \end{aligned}$$

beruht im wesentlichen darauf, daß das Funktionensystem (f, f') durch ein ihm äquivalentes „reduziertes" (F, F') ersetzt wird, aus dem die Lösungen unmittelbar hergeleitet werden können; diese Methode führte auf einem gedanklich höchst einfachen Wege zu jenen Lösungen und zu einigen charakteristischen Eigenschaften der Determinanten, aus welchen sie sich zusammensetzen. Es liegt nun sehr nahe, an Stelle von (f, f') ein beliebiges äquivalentes System

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi &= \alpha f + \alpha' f' \\ \varphi' &= \beta f + \beta' f' \end{aligned}$$

zu betrachten. Aus dem Umstande, daſs dann die Lösungen von $(\varphi = 0,\ \varphi' = 0)$ mit denen der Gleichungen (1) übereinstimmen, folgt dann unmittelbar der Fundamentalsatz dieser Theorie, der sogenannte Multiplikationssatz der Determinanten.

Zunächst erkennt man leicht, daſs das System (f, f') dann und nur dann dem abgeleiteten (φ, φ') äquivalent ist, wenn die Determinante

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \alpha, \alpha' \\ \beta, \beta' \end{vmatrix} = (\alpha\beta' - \alpha'\beta) \gtrless 0$$

ist. In der Tat folgt ja aus dem Satze auf S. 21, daſs nur unter dieser Bedingung die beiden homogenen Gleichungen für f und f'

$$\varphi = \alpha f + \alpha' f' = 0$$
$$\varphi' = \beta f + \beta' f' = 0$$

einzig und allein durch die Lösungen von $(f = 0, f' = 0)$ befriedigt werden.

Es seien nun die Koeffizienten $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{pmatrix}$ von f und f' völlig unbestimmte Gröſsen; dann besitzen die Gleichungen (1) die Lösung

$$(4) \qquad x : y : 1 = |b, c| : |c, a| : |a, b|,$$

und die Unbekannten sind durch diese Proportion eindeutig bestimmt.

Betrachtet man nun die beiden äquivalenten Gleichungen

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi &= \alpha f + \alpha' f' = (\alpha a + \alpha' a')x + (\alpha b + \alpha' b')y + (\alpha c + \alpha' c') = A\,x + B\,y + C \\ \varphi' &= \beta f + \beta' f' = (\beta a + \beta' a')x + (\beta b + \beta' b')y + (\beta c + \beta' c') = A'x + B'y + C', \end{aligned}$$

in denen auch die Substitutionskoeffizienten völlig unbestimmt sind, so ergibt sich aus ihnen für die Unbekannten die Proportion

$$(6) \qquad x : y : 1 = |B, C| : |C, A| : |A, B|;$$

und da diese Lösung mit der oben gefundenen notwendig übereinstimmt, so müssen die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (4) und (6) einander proportional sein; hieraus ergeben sich die identischen Gleichungen

$$(7) \qquad \frac{|A, B|}{|a, b|} = \frac{|B, C|}{|b, c|} = \frac{|C, A|}{|c, a|}.$$

Da nun die Koeffizienten A, A' und B, B' beziehlich nur (a, a') und (b, b') enthalten, so erkennt man leicht, daſs der erste Quotient in (7) von den Koeffizienten c und c' völlig unabhängig ist. Ebenso folgt, daſs der zweite Quotient a und a', der dritte b und b' gar nicht enthält. Der gemeinsame Wert λ der drei Brüche in (7) ist daher von den Werten der Koeffizienten von f und f' völlig unabhängig und ist daher eine ganze Funktion von den vier Koeffizienten $\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{pmatrix}$ allein. Um ihn zu bestimmen, kann man also in der Identität

$$(7a)\qquad \frac{|A, B|}{|a, b|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha a + \alpha' a', & \alpha b + \alpha' b' \\ \beta a + \beta' a', & \beta b + \beta' b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}} = \lambda$$

für die vier Koeffizienten (a, b, a', b') beliebige Werte annehmen, für welche nur Zähler und Nenner nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Setzt man aber speziell das System

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

so wird offenbar

$$\begin{pmatrix} A, & B \\ A', & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{pmatrix},$$

und aus (7a) ergibt sich daher $\lambda = \begin{vmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{vmatrix}$. So erhält man also aus (7a) die fundamentale Identität

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a + \alpha' a', & \alpha b + \alpha' b' \\ \beta a + \beta' a', & \beta b + \beta' b' \end{vmatrix}$$

oder ausgeführt

$$(8a)\qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(ab' - a'b) = (\alpha a + \alpha' a')(\beta b + \beta' b') - (\alpha b + \alpha' b')(\beta a + \beta' a').$$

Diese Identität, welche der Multiplikationssatz der Determinanten genannt wird, läfst sich in unserem einfachen Falle natürlich durch direkte Ausrechnung leicht verifizieren, und man erkennt so auch, dafs sie in dem vorher ausgeschlossenen Falle $\begin{vmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{vmatrix} = 0$ ebenfalls besteht. Bei der hier gegebenen Herleitung erhält man aber zugleich die Einsicht, dafs dieser Satz eine notwendige Folge davon ist, dafs äquivalente Gleichungssysteme gleiche Lösungen haben; und man gelangt so, wie sehr häufig in dem Gebiete der Determinanten und dem höheren der Invarianten, dazu, derartige Identitäten a priori durch einfache gedankliche Entwickelungen zu erschliefsen. Dieser Weg ist dem anderen, der direkten Ausrechnung, stets bei weitem vorzuziehen, da wir in der Mathematik gerade den Zweck verfolgen, uns durch Gedanken die Rechenarbeit zu ersparen. Hier hat uns die Algebra der Mühe überhoben, die komplizierte Rechenvorschrift, welche in der Determinante auf der rechten Seite von (8) enthalten ist, auszuführen, indem sie jenen Ausdruck durch das Produkt auf der linken Seite ersetzte, und diesen Vorteil konnten wir uns nur dadurch verschaffen, dafs wir für die hier auftretenden Zahlen unbestimmte Gröfsen, Buchstaben, zu setzen imstande waren. Aufserdem mag gleich an dieser Stelle hervorgehoben werden, dafs nur deshalb der

Satz (8) hier so einfach abgeleitet werden konnte, weil wir von vornherein zu den in ihm auftretenden Unbestimmten $\binom{a,\ b}{a',\ b'}$ noch die Konstanten c und c' hinzugenommen, also das Gebiet der Unbestimmten erweitert hatten; denn sonst hätten wir nicht die Unabhängigkeit der Quotienten (7) von den Koeffizienten der Funktionen (1) erschliefsen können. Auch diese „Erweiterung des Bereiches der Unbestimmten" ist in der ganzen Arithmetik und Algebra von hoher Bedeutung und grofsem Nutzen.

Der Beweis des Multiplikationstheoremes läfst sich auch in einer anderen Weise führen, welche einen Einblick gewährt in die arithmetische Behandlung der ganzen Funktionen mehrerer Variablen, auf welche im folgenden die Determinantentheorie gegründet werden soll. Aus dem Satze auf S. 21 folgte, dafs zwei homogene Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$
(9) \qquad \begin{aligned} f &= a\,x + b\,y = 0 \\ f' &= a'x + b'y = 0 \end{aligned}
$$

dann und nur dann eine wesentliche d. h. eine von der trivialen $x = y = 0$ verschiedene Lösung besitzen, wenn ihre Determinante $(ab' - a'b)$ verschwindet. Ist dies der Fall, und bildet man aus f und f' zwei andere Formen

$$
(9\text{a}) \qquad \begin{aligned} \varphi &= \alpha f + \alpha' f' = A\,x + B\,y \\ \varphi' &= \beta f + \beta' f' = A'x + B'y, \end{aligned}
$$

wo die neuen Koeffizienten die in (5) angegebene Bedeutung haben, so besitzen diese offenbar ebenfalls eine wesentliche Lösung, d. h. ihre Determinante verschwindet ebenfalls. Diese zweite Determinante

$$
(10) \qquad D(a, b, a', b') = \begin{vmatrix} A, & B \\ A', & B' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a + \alpha' a', & \alpha b + \alpha' b' \\ \beta a + \beta' a', & \beta b + \beta' b' \end{vmatrix}
$$

ist also eine ganze Funktion von (a, b, a', b'), welche identisch verschwindet, sobald $|a, b| = 0$, d. h. falls

$$
b' = \frac{a'b}{a}
$$

ist. Betrachtet man nun D für den Augenblick als Funktion von b' allein, so folgt aus ihrem Ausdruck in (10), dafs sie die Form hat

$$
D(b') = Pb' + Q,
$$

wo P und Q ganze Funktionen von (a, b, a') sind; da nun

$$
D\left(\frac{a'b}{a}\right) = P\,\frac{a'b}{a} + Q = 0
$$

ist, so ergibt sich

$$D(b') = D(b') - D\left(\frac{a'b}{a}\right) = P\,.\left(b' - \frac{a'b}{a}\right),$$

d. h. es ist

(10a) $$a\,.\,D = P(ab' - a'b).$$

Diese Gleichung zeigt, dafs das Produkt $P(ab' - a'b)$ als Funktion von a allein betrachtet, durch den Faktor a teilbar ist. Da aber der zweite Faktor $|a, b|$ nicht ein Vielfaches von a ist, so mufs P durch a teilbar, d. h. $P = aP_1$ sein, wo P_1 wieder eine ganze Funktion von a, b, a' bedeutet. Dadurch geht jene Gleichung über in

(10b) $$D(a, b, a', b') = P_1(ab' - a'b).$$

Da die linke Seite, wie sich aus der Entwickelung von (10) ergibt, eine ganze homogene Funktion der zweiten Dimension von (a, b, a', b') ist, und ein Gleiches von der Determinante $(ab' - a'b)$ gilt, so enthält der erste Faktor P_1 diese Koeffizienten gar nicht; um ihn zu bestimmen, kann man also für diese beliebige spezielle Werte wählen. Setzt man also wie vorher $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich mit Benutzung von (10)

$$P_1 = D(1, 0, 0, 1) = \begin{vmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{vmatrix},$$

man erhält also wieder aus (10b) das Multiplikationstheorem

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a + \alpha' a', & \alpha b + \alpha' b' \\ \beta a + \beta' a', & \beta b + \beta' b' \end{vmatrix}.$$

Die beiden vorangegangenen Beweise des Multiplikationssatzes beruhten im wesentlichen auf der Transformation eines Funktionensystemes in ein äquivalentes und auf der Vergleichung ihrer Lösungen. Ebenso wichtig und fruchtbar wie diese ist die Transformation der Variablen. Führt man in den Funktionen

(11) $$\begin{aligned} f(x, y) &= a\,x + b\,y + c \\ f'(x, y) &= a'x + b'y + c' \end{aligned}$$

an Stelle von x, y neue Variable ξ, η ein durch die Gleichungen

(11a) $$\begin{aligned} x &= \lambda\,\xi + \mu\,\eta \\ y &= \lambda'\xi + \mu'\eta, \end{aligned}$$

so verwandeln sich dieselben in lineare Funktionen von (ξ, η)

$$\begin{aligned} f(\lambda\xi + \mu\eta, \lambda'\xi + \mu'\eta) &= \varphi(\xi, \eta) = (a\,\lambda + b\,\lambda')\,\xi + (a\,\mu + b\,\mu')\,\eta + c \\ f'(\lambda\xi + \mu\eta, \lambda'\xi + \mu'\eta) &= \varphi'(\xi, \eta) = (a'\lambda + b'\lambda')\,\xi + (a'\mu + b'\mu')\,\eta + c'. \end{aligned}$$

Löst man nun die Gleichungen ($f = 0$, $f' = 0$) nach x und y, die Gleichungen ($\varphi = 0$, $\varphi' = 0$) nach (ξ, η) auf, so erhält man die folgenden Werte

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} a\mu + b\mu', & c \\ a'\mu + b'\mu', & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{vmatrix}}, \quad \eta = \frac{\begin{vmatrix} c, & a\lambda + b\lambda' \\ c', & a'\lambda + b'\lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{vmatrix}},$$

$$x = \frac{|b, c|}{|a, b|}, \qquad y = \frac{|c, a|}{|a, b|},$$

und diese sind für unbestimmte Werte der Koeffizienten $\begin{pmatrix} a, b, c & \lambda, \mu \\ a', b', c' & \lambda', \mu' \end{pmatrix}$ **eindeutig** bestimmt. Ersetzt man also in der ersten Transformationsgleichung (11a) x, ξ, η durch ihre hier gefundenen Werte, so ergibt sich die folgende Identität

$$\frac{|b, c|}{|a, b|} = \frac{\lambda \begin{vmatrix} a\mu + b\mu', & c \\ a'\mu + b'\mu', & c' \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} c, & a\lambda + b\lambda' \\ c', & a'\lambda + b'\lambda' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{vmatrix}}.$$

Für unsere Zwecke genügt es, diese Gleichung für irgendwelche besonders einfache Werte von c und c' zu betrachten. Setzen wir $c = 0$, $c' = 1$, so ergibt sich

$$\frac{b}{|a, b|} = \frac{\lambda(a\mu + b\mu') - \mu(a\lambda + b\lambda')}{\begin{vmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{vmatrix}} = \frac{b(\lambda\mu' - \lambda'\mu)}{\begin{vmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{vmatrix}},$$

und durch Multiplikation mit den Nennern erhalten wir die Gleichung

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{vmatrix}.$$

Die drei hier auftretenden Determinanten gehören zu den Systemen

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{pmatrix},$$

von denen das dritte offenbar in dem oben angegebenen Sinne aus den beiden ersten komponiert ist; folglich haben wir in (12) zum dritten Male den Multiplikationssatz erwiesen.

Vierte Vorlesung.

Die Komposition der Systeme. — Grundregeln für das Rechnen mit Systemen. — Das Einheitssystem. — Reziproke und transponierte Systeme. — Elementare Systeme. — Die Fundamentaleigenschaften der Determinante. — Dekomposition der Systeme. — Die Determinante als Invariante für die Reihenfolge der Komposition. — Geometrische Anwendungen: Eindeutige Abbildung zweier Ebenen aufeinander. Koordinatentransformation. — Die Determinante als Korrelationsfaktor der Abbildung. — Orthogonale Systeme.

§ 1.

Der am Ende der vorigen Vorlesung abgeleitete Multiplikationssatz für die Determinanten lehrt, dafs die Determinante des aus den Elementen zweier Systeme

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix}$$

gebildeten neuen Systemes

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{pmatrix}$$

gleich dem Produkte der Determinanten jener beiden ersten ist.

Wir lernen so eine eigentümliche Rechnungsvorschrift kennen, durch welche aus zwei Systemen ein drittes erzeugt werden kann; die weiteren Untersuchungen werden nun lehren, dafs in allen Anwendungen der Determinantentheorie zwei Systeme immer nur auf diese Weise miteinander verbunden werden; und zwar gilt dies nicht blofs für diese einfachsten Systeme der zweiten Ordnung, sondern ganz allgemein für die Systeme von n Zeilen und n Kolonnen. Daher soll diese Rechnungsvorschrift schon jetzt genauer studiert und zur Grundlage des Rechnens mit den Systemen gemacht werden.

Der blofse Anblick des Systemes (2) lehrt, dafs jedes seiner Elemente aus denjenigen der Systeme (1) dadurch gebildet wird, dafs man die Elemente je einer Zeile des ersten mit den entsprechenden Elementen je einer Kolonne des zweiten Systemes multipliziert und die so entstehenden Produkte addiert. Bezeichnet man zur Abkürzung mit H_1 und H_2 die erste und die zweite Zeile des ersten Systemes, und entsprechend mit V_1' und V_2' die beiden Vertikalreihen oder Kolonnen

des zweiten Systemes in (1), so kann man das komponierte System symbolisch so schreiben

$$\begin{pmatrix} H_1 V_1', & H_1 V_2' \\ H_2 V_1', & H_2 V_2' \end{pmatrix},$$

indem allgemein unter $H_i V_k'$ die Summe der Produkte der Elemente von H_i und der entsprechenden Elemente von V_k' verstanden wird. Wir nennen das so gebildete dritte System (2) aus dem ersten und zweiten Systeme in (1) komponiert; und die beiden Systeme (1) werden die Komponenten des dritten genannt. Bei dieser Bezeichnung kann also der Multiplikationssatz der Determinanten einfach folgendermaſsen ausgesprochen werden:

> Die Determinante eines aus zwei anderen komponierten Systemes ist dem Produkte der Determinanten seiner Komponenten gleich.

In neuerer Zeit pflegt man ein solches System abgekürzt durch einen Buchstaben zu bezeichnen; man setzt also z. B.

$$S = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix}$$

und bezeichnet dann das aus beiden komponierte System (2) durch das Symbol ST. Die Gesetze, welche dem Rechnen mit diesen Systemen zu Grunde liegen, sollen im nächsten Abschnitte auseinandergesetzt werden.

§ 2.

Sind

$$S = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix}$$

zwei beliebige Systeme von je vier Elementen, und bildet man aus ihnen nach der Vorschrift des vorigen Abschnittes das dritte

$$V = \begin{pmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{pmatrix},$$

so heiſst V das aus S und T (in dieser Reihenfolge) komponierte System. Diese Operation ist der Multiplikation sehr nahe verwandt, und man bezeichnet daher diesen Zusammenhang auch entsprechend durch die Gleichung $ST = V$ oder ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda + b\lambda', & a\mu + b\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{pmatrix}.$$

Ein wichtiger Unterschied zwischen dieser Komposition der Systeme und der Multiplikation der Zahlen besteht aber darin, daſs man hier

nicht die Reihenfolge der Komponenten vertauschen darf; denn das in umgekehrter Reihenfolge komponierte System

$$TS = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a + \mu\, a', & \lambda\, b + \mu\, b' \\ \lambda' a + \mu' a', & \lambda' b + \mu' b' \end{pmatrix}$$

ist offenbar in seinen Elementen von dem obigen vollständig verschieden. Hierauf beruht die gröfsere Schwierigkeit, aber auch das weit höhere Interesse, welches die Komposition der Systeme vor der Multiplikation der Zahlen voraus hat. Sie erinnert hierin an gewisse zusammengesetzte Worte (wie Stammbaum, Hausrat, Zahlwort), welche eine völlig andere Bedeutung erhalten, wenn man ihre Bestandteile in umgekehrter Ordnung zusammensetzt. Sind zwei spezielle Systeme S und T so beschaffen, dafs

$$ST = TS$$

ist, so heifsen S und T *miteinander vertauschbar*.

Hat man drei Systeme S, T, U, so kann man das neue System V, welches man erhält, indem man zuerst S mit T und das Resultat wieder mit U komponiert, kurz durch

$$V = (ST)\, U$$

bezeichnen. Die *einfache Ausrechnung* lehrt aber, dafs man zu genau demselben Resultate gelangt, wenn man S mit dem Kompositionsresultate von T und U komponiert, d. h. dafs auch

$$V = (ST)\, U = S(TU) \tag{1}$$

ist; denn wie man jene Komposition auch ausführt, man erhält immer eine und dieselbe Gleichung

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \alpha', & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\lambda\alpha + b\,\lambda'\alpha + a\,\mu\alpha' + b\,\mu'\alpha', & a\,\lambda\beta + b\,\lambda'\beta + a\,\mu\beta' + b\,\mu'\beta' \\ a'\lambda\alpha + b'\lambda'\alpha + a'\mu\alpha' + b'\mu'\alpha', & a'\lambda\beta + b'\lambda'\beta + a'\mu\beta' + b'\mu'\beta' \end{pmatrix};$$

ein anderer nicht auf die Ausrechnung gegründeter Beweis für diese Tatsache wird auf S. 60 gegeben werden. Offenbar gilt ein Gleiches auch für die Komposition von mehr als drei Systemen. Also teilt ein aus beliebig vielen Komponenten zusammengesetztes System mit einem Produkte die Eigenschaft, dafs das Resultat immer dasselbe ist, wie auch unter Festhaltung der Reihenfolge der Komponenten diese bei der Komposition zusammengefafst werden.

Aus diesem Grunde kann und soll der gemeinsame Wert jener beiden Systeme (1) durch

$$V = STU$$

bezeichnet werden.

Ist

$$ST = V,$$

so besagt der Multiplikationssatz der Determinanten, dafs

$$|S|\,|T| = |V|$$

ist, wenn man allgemein unter $|U|$ die aus dem Systeme U gebildete Determinante versteht; eine gleiche Beziehung besteht offenbar bei der Komposition von drei und mehr Systemen, z. B. folgt aus der Gleichung $V = S\,T\,U$

$$|V| = |S|\,|T|\,|U|.$$

Es ist also eine und zwar eine besonders merkwürdige Eigenschaft der Determinante eines Systemes S, dafs sie eine Funktion seiner vier Elemente ist, für welche die Reihenfolge der Kompositionen gleichgültig ist, denn es ist ja

$$|S\,T| = |T\,S| = |S|\,.\,|T|.$$

Schon hier drängt sich die Frage auf, ob es noch andere Funktionen $J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ von den vier Elementen (a, b, a', b') gibt, welchen dieselbe Eigenschaft zukommt. Im § 5 dieser Vorlesung wird diese Frage eingehend untersucht und nachgewiesen werden, dafs dies im wesentlichen nicht der Fall, dafs vielmehr die Determinante die einzige „Invariante" für die Reihenfolge der Kompositionen ist.

In der gewöhnlichen Zahlentheorie bezeichnet man als die Einheit diejenige Zahl, mit der jede Zahl multipliziert werden kann, ohne dafs sich ihr Wert verändert, d. h. für welche $a\,.\,1 = a$ ist. Ebenso wollen wir ein System E ein Einheitssystem nennen, wenn jedes andere System mit ihm komponiert werden kann, ohne dafs sich sein Wert ändert. Setzt man also

$$E = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix},$$

wo die vier Elemente noch zu bestimmen sind, so müfste

$$SE = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\lambda + b\,\lambda', & a\,\mu + b\,\mu' \\ a'\lambda + b'\lambda', & a'\mu + b'\mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$$

sein. Und hieraus folgt unmittelbar, dafs jener Forderung für unbestimmte $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ dann und nur dann genügt wird, wenn

$$E = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

genommen wird.

Aus der für jedes System bestehenden Gleichung

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$$

folgt noch weiter, dafs $ES = SE$ ist, d. h. dafs das Einheitssystem mit jedem anderen vertauscht werden kann.

Zu einer jeden von Null verschiedenen Zahl a existiert eine andere endliche Zahl $\frac{1}{a}$ oder a^{-1}, die mit ihr multipliziert die Einheit ergibt und welche aus diesem Grunde die zu a reziproke Zahl genannt wird. Ganz ebenso gehört zu jedem Systeme $S=\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ im allgemeinen ein anderes $\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix}$, welches mit jenem komponiert das Einheitssystem ergibt, für welches also

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \tag{2}$$

ist. Soll ein solches System existieren, so mufs notwendig die Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$$

des vorgelegten Systemes von Null verschieden sein, wie man sofort einsieht, wenn man in der Kompositionsgleichung (2) zu den Determinanten übergeht und beachtet, dafs die Determinante des Einheitssystemes gleich Eins ist. Ist aber Δ von Null verschieden, so existiert stets ein und auch nur ein solches System. Führt man nämlich in (2) die Komposition aus und setzt das so sich Ergebende dem Einheitssysteme gleich, so erhält man zur Bestimmung der unbekannten Elemente (λ, λ') und (μ, μ'), die beiden Paare von Gleichungen

$$\begin{array}{l|l} a\lambda+b\lambda'=1 & a\mu+b\mu'=0\\ a'\lambda+b'\lambda'=0 & a'\mu+b'\mu'=1, \end{array} \tag{2a}$$

und diese ergeben als einzige Auflösung die Werte

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{b'}{\Delta}, & \mu &= -\frac{b}{\Delta}\\ \lambda' &= -\frac{a'}{\Delta}, & \mu' &= \frac{a}{\Delta}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zu jedem Systeme $S=\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ mit nicht verschwindender Determinante Δ gehört also ein und nur ein anderes $\begin{pmatrix}\frac{b'}{\Delta}, & -\frac{b}{\Delta}\\ -\frac{a'}{\Delta}, & +\frac{a}{\Delta}\end{pmatrix}$, welches die Eigenschaft hat, dafs das erste mit dem zweiten komponiert das Einheitssystem ergibt.

Wegen der Analogie mit den gewöhnlichen Zahlen nennt man dasselbe das zu S reziproke System und bezeichnet es durch S^{-1}. Durch direkte Ausrechnung überzeugt man sich aber ferner, daſs das reziproke mit dem ursprünglichen Systeme vertauschbar ist, d. h. daſs auch

$$S^{-1}S = SS^{-1} = E \tag{4}$$

ist. Man kann also das zu S reziproke System auch als dasjenige definieren, welches mit jenem in irgend einer Reihenfolge komponiert das Einheitssystem ergibt. Aus der letzten Gleichung folgt endlich noch, daſs das reziproke System von S^{-1} wieder S ist, daſs hier also die volle Analogie mit der gewöhnlichen Multiplikation besteht.

Geht man in der Gleichung (4) von den Systemen zu ihren Determinanten über, so ergibt sich

$$\Delta\,\Delta' = 1,$$

wenn Δ' die Determinante des reziproken Systemes bezeichnet, ein Resultat, welches durch direkte Ausrechnung sofort bestätigt werden kann.

Die Determinanten reziproker Systeme sind also reziproke Zahlen.

Durch die Einführung der reziproken Systeme wird das Rechnen mit den Systemen beträchtlich erleichtert. Aus einer Gleichung von der Form

$$PSQ = T$$

kann man z. B. das System S unmittelbar ausrechnen, wenn die Determinanten $|P|$ und $|Q|$ der beiden Systeme P und Q von Null verschieden sind. Bezeichnet man nämlich mit P^{-1} und Q^{-1} die zu P und Q reziproken Systeme, so erhält man, indem man beide Seiten dieser Gleichung vorn mit P^{-1} und hinten mit Q^{-1} komponiert, die folgende Darstellung von S

$$S = P^{-1}\,T\,Q^{-1}.$$

Von dieser Auflösungsmethode wird im folgenden ein ausgedehnter Gebrauch gemacht werden.

Komponiert man ein System S mit sich selbst, so soll das Resultat SS mit S^2 bezeichnet werden. Es ist also

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b\,a', & a\,b + bb' \\ a'a + b'a', & a'b + b'^2 \end{pmatrix},$$

und entsprechend soll allgemein S^{μ} das Resultat der μ-maligen Komposition von S mit sich selbst angeben. Dann ist allgemein für irgend welche zwei positive Zahlen μ und ν

$$S^{\mu}S^{\nu} = S^{\mu+\nu} = S^{\nu}S^{\mu}, \tag{5}$$

d. h. zwei Potenzen eines und desselben Systemes mit positiven Exponenten sind miteinander vertauschbar. Diese Gleichung bleibt auch richtig, wenn einer der Exponenten μ und ν oder beide gleich Null sind, falls man analog wie bei den Zahlen

$$S^0 = E = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

setzt. Es sei endlich die Determinante von S nicht Null und S^{-1} das zu S reziproke System, so ist auch

$$SS^{-1} = S^{-1}S = E.$$

Ebenso werde mit S^{-2} das Resultat der zweimaligen Komposition von S^{-1} mit sich selbst bezeichnet, also $S^{-2} = (S^{-1})(S^{-1})$ gesetzt; dann ist aber

$$S^2 S^{-2} = S(SS^{-1})S^{-1} = SES^{-1} = SS^{-1} = E,$$

d. h. S^{-2} ist das zu S^2 reziproke System. Bezeichnet man entsprechend mit $S^{-\nu}$ das Resultat der ν-maligen Komposition von S^{-1} mit sich selbst, so folgt genau ebenso

$$S^\nu S^{-\nu} = 1,$$

d. h. $S^{-\nu}$ ist das reziproke System zu S^ν.

Dann folgt ohne weiteres, daſs bei diesen Festsetzungen die Fundamentalgleichung (5) gültig bleibt, wenn μ und ν beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null sind. Sind nämlich beide negativ, so braucht man ja nur $S^{-1} = \Sigma$ zu setzen, um diesen Fall auf den Fall positiver Exponenten zurückzuführen; ist aber $\mu = -m$ und $\nu = n$ und ist etwa $m \leqq n$, so ergibt sich

$$S^{-m} S^n = S^{-m}(S^m S^{n-m}) = S^{n-m} = S^n S^{-m},$$

und genau ebenso wird dieser Satz für $m > n$ bewiesen.

> Zwei Potenzen eines und desselben Systemes mit nicht verschwindender Determinante und beliebigen ganzzahligen Exponenten sind also stets vertauschbar.

Das System

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{pmatrix},$$

welches aus $S = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ dadurch hervorgeht, daſs man in ihm die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht, heiſst das zu S **konjugierte** oder das **transponierte System** (*Jacobi*, *Crelles* Journal, Bd. 53, S. 265; Werke, Bd. III, S. 583). Es soll vorläufig nur darauf aufmerksam

gemacht werden, daſs die Determinanten jener beiden Systeme übereinstimmen, denn man erkennt sofort, daſs

$$|S| = |\bar{S}| = ab' - a'b$$

ist.

§ 3.

Durch die nahen Beziehungen, welche zwischen der Komposition der Systeme und der Multiplikation der Zahlen bestehen, wird man naturgemäſs darauf geführt, die allgemeinen Systeme von vier Elementen in derselben Weise in elementare, nicht weiter zerlegbare Systeme zu dekomponieren, wie man in der Arithmetik jede zusammengesetzte Zahl als Produkt ihrer Primfaktoren darstellt. Hierdurch wird dann von selbst die Untersuchung der allgemeinen Systeme auf die viel einfachere der elementaren reduziert.

Die Frage, welche Systeme als elementare anzusehen sind, ist hier keine vollständig bestimmte, weil wir die Elemente der Systeme vorläufig als vollständig beliebige Gröſsen voraussetzen; die Bestimmung darüber hängt vielmehr von dem Charakter der speziellen Untersuchung ab. Die einzige Forderung, welche man an diese Elementarsysteme zu stellen hat, ist die, daſs sich alle anderen aus ihnen zusammensetzen lassen, und daſs keins von ihnen durch alle anderen darstellbar ist.

Für die Untersuchung der Systeme von vier Elementen können und wollen wir als elementare die folgenden drei Systeme ansehen

$$\text{I. } J = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{II. } \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{III. } \begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

wo die in dem dritten Systeme auftretende Gröſse p eine ganz beliebige Zahl bedeutet. Die Determinanten der beiden ersten Systeme sind offenbar gleich eins, die des letzten gleich p. Wir werden zeigen, daſs sich jedes beliebige System aus diesen zusammensetzen läſst, daſs sie also in gewissem Sinne die Rolle von Primfaktoren im Gebiete der Systeme spielen. Zuerst wollen wir aber die Eigenschaften dieser Elementarsysteme selbst untersuchen und dann fragen, wie ein beliebiges System geändert wird, wenn man es mit einem der drei Elementarsysteme vorn oder hinten komponiert.

Das erste System ist dem Einheitssysteme sehr nahe verwandt, denn es bestehen für dieses offenbar die folgenden Kompositionsgleichungen

$$J^2 = \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-1, & 0\\0, & -1\end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0, & 1\\-1, & 0\end{pmatrix}$$

$$J^4 = \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix} = E.$$

Durch viermalige Komposition dieses Systemes mit sich selbst erhält man also das Einheitssystem. Aus diesen Gleichungen folgt mit Berücksichtigung von (5) des vorigen Abschnittes die allgemeinere

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^{4\nu+\delta} = \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^{\delta} \qquad (\delta = 0, 1, 2, 3).$$

Auch das zu J reziproke System ist durch J darstellbar, denn es ist offenbar

$$J^{-1} = \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0, & 1\\-1, & 0\end{pmatrix}.$$

Komponiert man das zweite System ein oder mehrere Male mit sich selbst, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1, & 2\\0, & 1\end{pmatrix}$$

und allgemeiner für jede positive ganze Zahl t

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}1, & t\\0, & 1\end{pmatrix}.$$

Das reziproke System zu dem System II ist offenbar $\begin{pmatrix}1, & -1\\0, & 1\end{pmatrix}$, weil

$$\begin{pmatrix}1, & +1\\0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & -1\\0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0\\0, & 1\end{pmatrix}$$

ist; und man erkennt ebenso, daſs allgemein für jedes ganzzahlige t

$$\begin{pmatrix}1, & t\\0, & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1, & -t\\0, & 1\end{pmatrix},$$

d. h., daſs $\left[\begin{pmatrix}1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}^t\right]^{-1} = \begin{pmatrix}1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}^{-t}$ ist.

Auch hier kann man das reziproke System $\begin{pmatrix}1, & -1\\0, & 1\end{pmatrix}$ zwar nicht durch das zweite Elementarsystem allein, wohl aber durch das zweite und erste darstellen.

Bildet man nämlich das System

$$R = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich leicht, daſs

$$R^3 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$$

ist, und hieraus folgt

$$\left[\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\right]^3 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^2;$$

durch hintere Komposition mit $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ und vordere mit $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^2$ findet man daher die zu beweisende Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Für ein beliebiges auch nicht ganzzahliges t kann man aber das System $\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ nur unter Hinzuziehung auch des dritten Elementarsystemes darstellen, und zwar durch die Kompositionsgleichung

$$\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

also speziell für $t = -1$

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Das reziproke System zu $\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ ist ein System derselben Art, denn man hat

$$\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun zunächst die Wirkung untersuchen, welche die Komposition mit einem dieser drei Elementarsysteme auf ein beliebiges System $S = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ und auf dessen Determinante ausübt. Komponiert man dasselbe zunächst vorn oder hinten mit dem ersten Elementarsystem, so erhält man die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a', & -b' \\ a, & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b, & -a \\ b', & -a' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im ersten Falle werden also die beiden Horizontalreihen des Systemes S vertauscht, wobei die neue erste Zeile das negative Zeichen erhält. Bei der hinteren Komposition mit demselben Elementarsystem vertauschen sich die beiden Vertikalreihen, und die neue zweite Kolonne erhält das negative Zeichen. Die Komposition mit diesem Systeme bewirkt also jedesmal eine Vertauschung der Zeilen oder Kolonnen; aus diesem Grunde wird $\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ das Vertauschungssystem genannt.

Geht man in den beiden letzten Gleichungen von den Systemen zu ihren Determinanten über und berücksichtigt dabei, daſs die Determinante des Vertauschungssystemes gleich eins ist, so ergeben sich die Identitäten

$$\text{(1a)}\qquad \begin{vmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-a', & -b'\\ a, & b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}b, & -a\\ b', & -a'\end{vmatrix}.$$

Die Determinante bleibt also ungeändert, wenn man ihre Zeilen oder ihre Kolonnen vertauscht und der neuen ersten Zeile oder der zweiten Kolonne das negative Zeichen beilegt.

Betrachtet man an Stelle des zweiten Elementarsystemes $\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ gleich das allgemeinere $\begin{pmatrix}1, & t\\ 0, & 1\end{pmatrix}$, welches sich ja aus den drei Elementarsystemen zusammensetzen läſst, so ergeben sich hier entsprechend die Kompositionsgleichungen

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned}\begin{pmatrix}1, & t\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a+ta', & b+tb'\\ a', & b'\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & t\\ 0, & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a, & at+b\\ a', & a't+b'\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Im ersten Falle werden also zu den Elementen der ersten Horizontalreihe die mit t multiplizierten entsprechenden der zweiten, im zweiten Falle werden zu den Elementen der zweiten Kolonne die mit t multiplizierten entsprechenden der ersten addiert.

Geht man auch hier zu den Determinanten über, so ergeben sich die beiden Identitäten

$$\text{(2a)}\qquad \begin{vmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+ta', & b+tb'\\ a' & b'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a, & at+b\\ a', & a't+b'\end{vmatrix}.$$

Für das dritte System endlich erhält man die Kompositionsgleichungen

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned}\begin{pmatrix}p, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}pa, & pb\\ a', & b'\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}pa, & b\\ pa', & b'\end{pmatrix},\end{aligned}$$

und beim Übergange zu den Determinanten

$$(3a)\qquad p\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa, & pb \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa, & b \\ pa', & b' \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung der Gleichungen (1a), (2a), (3a) ergibt sich jetzt folgendes System von Determinantenrelationen

$$(4)\qquad \begin{aligned} \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} a', & b' \\ a, & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b, & a \\ b', & a' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+ta', & b+tb' \\ a' \quad , & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \quad , & b \\ a'+ta, & b'+tb \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a, & b+ta \\ a', & b'+ta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+tb, & b \\ a'+tb', & b' \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$p\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa, & b \\ pa', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & pb \\ a', & pb' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa, & pb \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \;, & b \\ pa', & pb' \end{vmatrix},$$

und aus ihnen ergeben sich als unmittelbare Folge des Multiplikationstheorems die folgenden Fundamentalsätze für die Determinanten zweiter Ordnung, welche hier auch leicht durch direkte Ausrechnung verifiziert werden können:

I. Die Determinante wechselt nur ihr Zeichen, wenn in ihrem Elementensystem die beiden Zeilen oder die beiden Kolonnen vertauscht werden.

II. Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe gleiche Multipla der entsprechenden Elemente der Parallelreihe addiert.

III. Multipliziert man alle Elemente einer Zeile oder einer Kolonne mit derselben Zahl p, so erhält man das p-fache der vorigen Determinante.

Fig. 3.

Schon in § 2 der dritten Vorlesung wurde hervorgehoben, daſs man das geometrische Bild einer Determinante $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$ erhalten kann, indem man in der Ebene zwei Punkte P und P' mit den Koordinaten (a, b), (a', b') und durch diese und den Anfangspunkt ein Dreieck OPP' bestimmt. An diesem geometrischen Bilde kann man, wie hier nur kurz erwähnt werden mag, alle Determinantensätze speziell die drei soeben gefundenen anschaulich deuten.

So sagt z. B. der Satz

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a', & -b' \\ a, & b \end{vmatrix}$$

aus, daſs der Inhalt und die Umlaufsrichtung des Dreiecks OPP' ungeändert bleibt, wenn man statt des Punktes $P' = (a', b')$ seinen in Bezug auf den Anfangspunkt symmetrischen $P_1' = (-a', -b')$ wählt, und zugleich die Reihenfolge von P und P_1' vertauscht.

Der zweite Satz $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + ta', & b + tb' \\ a' & b' \end{vmatrix}$ besagt, daſs alle diejenigen Dreiecke, deren gemeinsame Grundlinie OP' ist, und deren Spitzen auf der durch P zu OP' gezogenen Parallelen liegen, mit OPP' inhaltsgleich sind und dieselbe Umlaufsrichtung haben, d. h. er ist der Elementarsatz über die Inhaltsgleichheit von Dreiecken mit gleicher Grundlinie zwischen denselben Parallelen.

Der dritte Satz $p\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa, & pb \\ a' & b' \end{vmatrix}$ spricht aus, daſs Dreiecke von gleicher Höhe sich verhalten wie ihre Grundlinien.

§ 4.

Es soll nun gezeigt werden, daſs jedes System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$, dessen Determinante $\Delta = ab' - a'b$ nicht gleich Null ist, als das Resultat der Komposition elementarer Systeme darstellbar ist. In diesem einfachsten Falle kann man nun jene Zerlegung direkt angeben. Zunächst kann man ein System mit der Determinante Δ als Produkt eines Elementarsystemes und eines solchen mit der Determinante eins darstellen; denn auf der rechten Seite der Identität

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\Delta}, & \frac{b}{\Delta} \\ a', & b' \end{pmatrix}$$

ist ja das erste System bereits ein elementares, während das zweite die Determinante $\frac{ab' - a'b}{\Delta} = 1$ hat.

Zur Dekomposition dieses letzten Systemes kann man auſser den elementaren Systemen auch solche von der Form $\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ benutzen, weil diese ja aus den elementaren in bekannter Weise komponiert sind. Aus diesen und den Vertauschungssystemen kann nun das soeben betrachtete leicht zusammengesetzt werden. Bildet man nämlich das Kompositionsresultat der fünf Systeme

$$(1)\quad \begin{pmatrix}1, & \alpha\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & \beta\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & \gamma\\ 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta-1, & \alpha\beta\gamma-\alpha-\gamma\\ \beta, & \beta\gamma-1\end{pmatrix},$$

so ist dieses ein System, dessen Determinante gleich eins ist, weil dasselbe von allen seinen Komponenten gilt. Damit dieses aber mit $\begin{pmatrix}\frac{a}{\Delta}, & \frac{b}{\Delta}\\ a', & b'\end{pmatrix}$ übereinstimme, braucht man nur die bis jetzt noch willkürlichen Gröſsen α, β, γ so zu bestimmen, daſs

$$\alpha\beta-1=\frac{a}{\Delta},\quad \alpha\beta\gamma-\alpha-\gamma=\frac{b}{\Delta}$$

$$\beta=a',\qquad\qquad \beta\gamma-1=b'$$

wird. Aus der ersten, dritten und vierten Gleichung ergeben sich unter der Voraussetzung $a'\gtrless 0$ für diese Gröſsen die folgenden Werte:

$$\alpha=\frac{a+\Delta}{a'\Delta},\qquad \beta=a',\qquad \gamma=\frac{b'+1}{a'},$$

und die zweite Gleichung ist dann von selbst erfüllt, weil sie eine Folge der drei übrigen und des Umstandes ist, daſs die Determinante gleich eins ist.

Ist also $a'\gtrless 0$, so erhält man die folgende Dekomposition des Systemes $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$

$$(2)\quad \begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & \frac{a+\Delta}{a'\Delta}\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & a'\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & \frac{b'+1}{a'}\\ 0, & 1\end{pmatrix};$$

von diesen sind das erste und die beiden Vertauschungssysteme bereits selbst elementar, von den drei anderen zerfällt nach S. 48 jedes noch in drei elementare Systeme, so daſs hier eine Dekomposition in zwölf elementare Komponenten gegeben ist.

Ist $a'=0$, so gilt die soeben gegebene Zerlegung nicht unmittelbar. Geht man aber hier von der Identität

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a', & b'\\ -a, & -b\end{pmatrix}$$

aus und zerlegt dann die zweite Komponente auf der rechten Seite weiter, so ist hier das dem a' entsprechende Element $-a$ sicher von Null verschieden, weil ja andernfalls $ab'-a'b$ gleich Null sein müſste.

Die Zerlegung in Elementarsysteme ist aber hier keine eindeutige, und hierauf beruht die fundamentale Verschiedenheit derselben von der Zerfällung der Zahlen in ihre Primfaktoren. So kann z. B., wie die

einfache Ausrechnung zeigt, das System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ auch folgendermaſsen in 17 Elementarsysteme zerlegt werden

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{a}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{aa'}{\Delta}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{aa'}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \frac{b}{a}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{b}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Grund dieser Verschiedenheit liegt eben darin, daſs hier die Reihenfolge der Komposition nicht gleichgültig ist.

§ 5.

Mit Hilfe der im vorigen Abschnitte gefundenen Zerlegung eines Systemes in Elementarsysteme kann jetzt auch die schon vorher (S. 42) aufgeworfene Frage beantwortet werden, wie eine Funktion der vier Elemente eines Systemes beschaffen sein muſs, damit für sie die Reihenfolge der Komposition gleichgültig ist. Sind also

$$S = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{pmatrix}$$

zwei Systeme, so soll die Funktion $F\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ so bestimmt werden, daſs für unbestimmte Werte der Elemente von S und S' die Gleichung

$$F(SS') = F(S'S) \tag{1}$$

oder, was dasselbe ist, daſs

$$F\begin{pmatrix} a\,\alpha + b\,\beta, & a\,\alpha' + b\,\beta' \\ a'\alpha + b'\beta, & a'\alpha' + b'\beta' \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \alpha a + \alpha' a', & \alpha b + \alpha' b' \\ \beta a + \beta' a', & \beta b + \beta' b' \end{pmatrix} \tag{1a}$$

besteht. Ist ferner S'' irgend ein drittes System, so muſs F so beschaffen sein, daſs auch

$$F(SS'S'') = F(SS''S') \tag{2}$$

ist; ist diese Bedingung aber erfüllt, so bleibt F auch ungeändert, wenn man die drei Komponenten auf alle sechs überhaupt mögliche Arten vertauscht. In der Tat ist ja wegen (1)

$$F(SS'S'') = F[(SS')S''] = F[S''(SS')] = F(S''SS')$$
$$= F[S(S'S'')] = F[(S'S'')S] = F(S'S''S),$$

und genau ebenso findet man

$$F(SS''S') = F(S''S'S) = F(S'SS''),$$

wegen (2) sind also wirklich alle jene sechs Funktionen einander gleich.

Ist aber F eine solche Funktion der vier Elemente von S, daſs die beiden Gleichungen (1) und (2)

$$F(SS') = F(S'S)$$
$$F(SS'S'') = F(SS''S')$$

erfüllt sind, so zeigt man leicht induktiv, daſs für beliebig viele Systeme $S_1, S_2, \dots S_n$

$$F(S_1 S_2 \dots S_n) = F(S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_n}) \tag{3}$$

ist, wenn $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots S_{i_n}$ die Systeme $S_1, S_2, \dots S_n$ in irgend einer Vertauschung bedeuten. Zunächst erkennt man nämlich ohne weiteres, daſs eine jede solche Vertauschung $(S_{i_1}, \dots S_{i_n})$ dadurch erhalten werden kann, daſs man hintereinander immer zwei **benachbarte** Elemente S_k, S_{k+1} miteinander vertauscht; denn durch eine Anzahl von solchen Vertauschungen kann man zuerst S_{i_1} successive an die Stelle von $S_{i_1-1}, S_{i_1-2}, \dots S_1$ bringen, dann S_{i_2} an die zweite Stelle u.s.w. Also ist die allgemeine Gleichung (3) bewiesen, wenn man zeigen kann, daſs allgemein

$$F(S_1 \dots S_{k-1} S_k S_{k+1} S_{k+2} \dots S_n) = F(S_1 \dots S_{k-1} S_{k+1} S_k \dots S_n)$$

ist. Setzt man aber die beiden links und rechts auftretenden Produkte

$$S_1 \dots S_{k-1} = S_0, \qquad S_{k+2} \dots S_n = S_0',$$

so reduziert sich die zu beweisende Gleichung auf

$$F(S_0 S_k S_{k+1} S_0') = F(S_0 S_{k+1} S_k S_0'); \tag{4}$$

nun ist aber nach der Voraussetzung (2)

$$F(S_0 S_k S_{k+1}) = F(S_0 S_{k+1} S_k);$$

ersetzt man hier S_{k+1} durch $S_{k+1} S_0'$ und benutzt dann wieder die Voraussetzung (2), so ergibt sich endlich in der Tat

$$F(S_0 S_k S_{k+1} S_0') = F(S_0 S_{k+1} S_0' S_k) = F([S_0 S_{k+1}] S_0' S_k) = F(S_0 S_{k+1} S_k S_0').$$

Mit Hilfe unserer Dekompositionsgleichungen (2) auf S. 52 für ein beliebiges System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ zeigt man nun leicht, daſs für eine Funktion jener vier Gröſsen dann und nur dann die Reihenfolge der Kompositionen gleichgültig ist, wenn dieselben nur in der Verbindung $(ab' - a'b)$ auftreten, wenn also $F\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ eigentlich nur von der einen Variablen Δ abhängt.

In der Tat war ja

$$(5)\ \begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\gamma, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\gamma}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

wo α, β, γ drei rationale Funktionen der Elemente sind, auf deren Werte es jetzt nicht ankommt. Soll also $F\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ eine solche Funktion der vier Größen (a, b, a', b') sein, daß eine Änderung der Reihenfolge der Kompositionen an ihrem Werte nichts ändert, so muß F auch ungeändert bleiben, wenn man das System $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ durch seinen Wert in (5) ersetzt, und dann die Reihenfolge der Kompositionen ganz beliebig wählt. Ordnet man nun die Systeme rechts in der Reihenfolge

$$\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\alpha, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\gamma}, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\right]^2\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

so reduziert sich die erste eckige Klammer offenbar auf das Einheitssystem, die zweite auf $\begin{pmatrix}1, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & -1\end{pmatrix}$; es muß also sein

$$F\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=F\left[\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\right]=F\begin{pmatrix}0, & -\Delta\\ 1, & 0\end{pmatrix},$$

d. h. die Funktion F muß notwendig eine solche sein, in der die vier Variabelen (a, b, a', b') n u r in der Zusammensetzung $\Delta = ab' - a'b$ auftreten, oder F muß von Δ allein abhängen. Anderseits haben wir aber erkannt, daß die Determinante Δ, also auch natürlich jede beliebige Funktion derselben, wirklich von der Reihenfolge der Komposition unabhängig ist. Wir sind also zu dem fundamentalen Satze gelangt:

> Der Wert einer Funktion der vier Größen eines komponierten Systemes ist dann und nur dann von der Reihenfolge der Systeme unabhängig, wenn diese einzig und allein von der Determinante des Systemes abhängt.

In diesem Satze ist somit die charakteristische Invarianteneigenschaft der Determinante ausgesprochen, da sie wirklich nur Funktionen der Determinante selbst zukommt.

§ 6.

Von der hier betrachteten Komposition der Systeme kann man sich wieder ein sehr anschauliches geometrisches Bild machen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Ebenen E und E', nehmen in jeder von ihnen ein rechtwinkliges Koordinatensystem an und ordnen jedem Punkte $P' = (x', y')$ der zweiten denjenigen Punkt P der ersten Ebene zu, dessen Koordinaten (x, y) mit denen von P' durch die Gleichungen

$$x = a\,x' + b\,y' + c$$
$$y = a'x' + b'y' + c'$$

zusammenhängen. Dann entspricht offenbar jedem Punkte von E' ein und nur ein Punkt von E; die zweite Ebene ist also auf der ersten abgebildet. Damit aber diese Beziehung eine umkehrbare sei, ist noch eine Bedingung zu erfüllen. Um diese aufzufinden, wollen wir der Einfachheit wegen $c = c' = 0$, d. h. jene beiden Abbildungsgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} x &= a\,x' + b\,y' \\ y &= a'x' + b'y' \end{aligned} \tag{1}$$

annehmen, was ja offenbar durch eine parallele Verschiebung des ersten Koordinatensystemes, d. h. ohne jede Änderung in der Natur der Abbildung, erreicht wird. Ist dann die Determinante

$$\Delta = ab' - a'b$$

von Null verschieden, so besitzt das Gleichungssystem (1) für jedes endliche Wertepaar (x, y) eine und nur eine endliche Lösung, jedem Punkte $P = (x, y)$ von E entspricht also auch ein einziger Punkt P' von E', d. h. beide Ebenen sind e i n d e u t i g aufeinander abgebildet.

Ist dagegen $\Delta = 0$, aber mindestens ein Element, etwa $a \gtrless 0$, so folgt aus den Gleichungen (1) sofort

$$a'x - ay = 0, \tag{2}$$

d. h. jedem Punkte von E' entspricht stets ein Punkt der bestimmten Geraden (2), also ist hier die ganze Ebene E' auf jener Geraden abgebildet; umgekehrt entspricht aber keinem außerhalb der Geraden (2) liegenden Punkte von E ein Punkt von E'; in diesem Falle ist also die Abbildung beider Ebenen keine eindeutige.

Wir wollen nun die Natur dieser Abbildung beider Ebenen in dem Falle genauer untersuchen, daſs sie eine eindeutige, daſs also $\Delta \gtrless 0$ ist. Wählt man in E' zwei Punkte $1'$ und $2'$ mit den Koordinaten (x'_1, y'_1) und (x'_2, y'_2) beliebig aus, so wird durch sie und den

Koordinatenanfangspunkt $0'$ ein Dreieck bestimmt, dessen doppelter Inhalt und dessen Umlaufssinn nach S. 32 durch die Gleichung

$$(3) \qquad (0', 1', 2') = \begin{vmatrix} x_1', & y_1' \\ x_2', & y_2' \end{vmatrix}$$

gegeben ist. Sind 0, 1, 2 die entsprechenden Punkte von E, so sind ihre Koordinaten beziehlich

$$(0, 0), \quad (ax_1' + by_1', \; a'x_1' + b'y_1'), \quad (ax_2' + by_2', \; a'x_2' + b'y_2'),$$

also ist der entsprechende Ausdruck für den doppelten Dreiecksinhalt

$$(0, 1, 2) = \begin{vmatrix} ax_1' + by_1', & a'x_1' + b'y_1' \\ ax_2' + by_2', & a'x_2' + b'y_2' \end{vmatrix},$$

d. h. unter Berücksichtigung des Multiplikationssatzes

$$(0, 1, 2) = \begin{vmatrix} x_1', & y_1' \\ x_2', & y_2' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix} = (0', 1', 2') \,.\, \Delta.$$

Es ist also stets

$$\frac{(0, 1, 2)}{(0', 1', 2')} = \Delta.$$

Ganz ebenso folgt aus dem Ausdrucke (1a) auf S. 32, daſs wenn (1, 2, 3) und (1′, 2′, 3′) die Ausdrücke für den doppelten Inhalt von zwei beliebigen entsprechenden Dreiecken sind, auch hier die Proportion besteht

$$(4) \qquad \frac{(1, 2, 3)}{(1', 2', 3')} = \Delta.$$

Das Verhältnis der Flächeninhalte entsprechender Dreiecke ist also stets gleich der Transformationsdeterminante, und die Umlaufsrichtungen sind einander gleich oder entgegengesetzt, je nachdem diese Determinante positiv oder negativ ist.

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daſs den Punkten einer Geraden l in E die einer Geraden l' in E' eindeutig entsprechen; denn aus der Gleichung (4) folgt ja, daſs der Punkt 3 dann und nur dann auf der Geraden $\overline{1, 2}$ liegt, wenn sein Bild $3'$ auf der Geraden $\overline{1', 2'}$ sich befindet. Weil bei dieser Abbildung das Bild jeder geraden Linie wieder eine solche ist, nennt man die hier betrachtete Beziehung der beiden Ebenen eine kollineare.

Betrachtet man endlich in E ein beliebiges, sich selbst nicht schneidendes Polygon P, so entspricht diesem ein ebensolches Polygon P' mit gleichviel Ecken, und aus dem Ausdruck für den Inhalt von P, dargestellt als eine Summe von n Determinanten, ergibt sich leicht unter Anwendung des Multiplikationssatzes:

Das Verhältnis der Flächeninhalte von zwei entsprechenden Figuren in den Ebenen E und E' ist gleich der Transformationsdeterminante, und ihre Umlaufsrichtungen sind einander gleich oder entgegengesetzt, je nachdem diese Determinante positiv oder negativ ist.

Man kann aus diesem Grunde die Transformationsdeterminante, welche das Inhaltsverhältnis entsprechender Figuren bestimmt, den **Korrelationsfaktor** nennen.

Dies Resultat ist besonders wichtig, weil der Inhalt in einer Ebene nichts anderes als die in zwei Dimensionen übersetzte Maſszahl ist. In der Geraden kann das Maſs entstanden gedacht werden aus der Vorstellung der Anzahl gleichweit voneinander entfernter Punkte. Ähnlich kann man sich das Messen in der Ebene entstanden denken, aus einem Zählen in zwei Dimensionen. Unsere Beziehung entspricht also einer Veränderung der Maſseinheit in der Ebene, deren Gröſse durch die Determinante bestimmt ist.

§ 7.

Durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= a\,x' + b\,y' \\ y &= a'x' + b'y' \end{aligned} \tag{1}$$

wurde die Ebene E' auf der Ebene E Punkt für Punkt abgebildet, und diese Beziehung war, falls die Substitutionsdeterminante $\Delta = \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$ von Null verschieden ist, eindeutig umkehrbar, wie man auch aus den durch direkte Auflösung sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \frac{b'}{\Delta}x - \frac{b}{\Delta}y \\ y' &= -\frac{a'}{\Delta}x + \frac{a}{\Delta}y \end{aligned} \tag{1a}$$

unmittelbar erkennt. Der besseren Übersicht wegen sollen die Transformationsgleichungen (1), vermittelst deren (x, y) durch (x', y') ausgedrückt werden, in der folgenden leicht verständlichen symbolischen Form

$$(x, y) = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} (x', y') \tag{2}$$

oder auch, falls das System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ der Substitutionskoeffizienten durch (S) bezeichnet wird, in der Form

(2a) $$(x, y) = (S)(x', y')$$

geschrieben werden. Bedeutet dann, wie früher, S^{-1} das zu S reziproke System, so läßt sich die Auflösung (1a) von (1) offenbar schreiben

(2b) $$(x', y') = (S^{-1})(x, y).$$

Wird nun auf der zweiten Ebene E' eine dritte E'' durch die neuen Gleichungen

(3) $$\begin{aligned} x' &= \lambda\, x'' + \mu\, y'' \\ y' &= \lambda' x'' + \mu' y'', \end{aligned}$$

oder in der einfacheren Schreibweise

(3a) $$(x', y') = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} (x'', y'')$$

abgebildet, so ergeben sich unter Benutzung von (1) und (3) die folgenden Gleichungen zwischen (x, y) und (x'', y'')

(4) $$\begin{aligned} x &= (a\,\lambda + b\,\lambda') x'' + (a\,\mu + b\,\mu') y'' \\ y &= (a'\lambda + b'\lambda') x'' + (a'\mu + b'\mu') y''; \end{aligned}$$

oder, da das hier auftretende Substitutionssystem aus $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix}$ komponiert ist, so läßt sich die durch die beiden Gleichungssysteme

(5) $$\begin{aligned} (x, y) &= \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} (x', y') \\ (x', y') &= \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} (x'', y'') \end{aligned}$$

vermittelte Beziehung zwischen (x, y) und (x'', y'') folgendermaßen schreiben

(6) $$(x, y) = \left[\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix} \right] (x'', y'').$$

Sind entsprechend eine Reihe z. B. von vier Ebenen E, E', E'', E''' durch die Gleichungen

(6a) $$\begin{aligned} (x, y) &= (P)(x', y') \\ (x', y') &= (Q)(x'', y'') \\ (x'', y'') &= (R)(x''', y''') \end{aligned}$$

aufeinander bezogen, so erkennt man direkt, daß die letzte auf die erste durch die Gleichungen

(6b) $$(x, y) = (P\,Q\,R)(x''', y''')$$

abgebildet ist, wo wie vorher $P\,Q\,R$ das aus den Komponenten P, Q, R in dieser Reihenfolge zusammengesetzte System bedeutet.

Aus diesem Resultate kann man einen nicht auf die Ausrechnung gegründeten Beweis des wichtigen Satzes ableiten, daſs für die Komposition der Systeme das sogenannte assoziative Gesetz gilt, daſs nämlich das System PQR dasselbe bleibt, wie man auch die drei Komponenten unter Wahrung ihrer Reihenfolge zusammenfassen mag. Bildet man nämlich durch die erste der Gleichungen (6a) die Ebene E vermittelst P auf E' ab und dann E' durch die komponierte Substitution QR auf E''', so erhält man die Abbildung von E auf E''' durch $P(QR)$. Dieselbe Abbildung erhält man aber, wenn man von E durch PQ zuerst zu E'' und von E'' durch R zu E''' übergeht; und so ergibt sich die Gleichung

$$PQR = P(QR) = (PQ)R,$$

welche eben das assoziative Gesetz für die Komposition der Systeme ausspricht, und dieser Beweis kann ohne weiteres auf die Komposition beliebig vieler Systeme ausgedehnt werden.

Die Gleichungen (1) ergaben dann und nur dann eine eindeutige Abbildung der Ebenen E und E' aufeinander, wenn der Korrelationsfaktor $|P| = |a, b|$ von Null verschieden war, und ein Gleiches muſs für die Determinante $|Q| = |\lambda, \mu|$ der Fall sein, damit E' auf E'' eindeutig abgebildet sei. Ist das aber der Fall, so muſs auch zwischen E und E'' eine eindeutige Beziehung bestehen, und das ist auch in der Tat der Fall, da ja nach (6) und dem Multiplikationssatze der hier auftretende Korrelationsfaktor

$$(7) \qquad |PQ| = \left|\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{vmatrix} = |P|\,|Q|$$

ist. Hieraus ergibt sich, daſs bei dieser successiven Abbildung das Inhaltsverhältnis entsprechender Figuren gleich dem Produkte der beiden Korrelationsfaktoren ist, ein Satz, der auch direkt erschlossen, und auf den dann ein neuer Beweis des Multiplikationstheorems leicht gegründet werden könnte.

§ 8.

Von besonderer Wichtigkeit für die analytische Geometrie ist diejenige Abbildung

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \lambda\,\xi + \mu\,\eta \\ y &= \lambda'\xi + \mu'\eta, \end{aligned}$$

bei welcher nicht nur je zwei entsprechende Flächenteile inhaltsgleich sind, sondern auch entsprechende Strecken gleiche Länge besitzen. Ist dies der Fall, so wird $S = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{pmatrix}$ ein **orthogonales System** genannt. Da alsdann zwei entsprechende Dreiecke gleiche Seiten besitzen,

also kongruent sind, so ist die erste Annahme eine Folge der zweiten. Da bei dieser Abbildung die Anfangspunkte O und O' beider Koordinatensysteme einander entsprechen, so müssen zunächst, falls P und P' zwei beliebige entsprechende Punkte beider Systeme sind, die beiden Strecken OP und $O'P'$ gleiche Länge besitzen. Sind also (x, y) und (ξ, η) die Koordinaten zweier entsprechender Punkte, so mufs die Substitution (1) so beschaffen sein, dafs

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{2}$$

ist, d. h. es mufs

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda'^2 &= 1 \\ \mu^2 + \mu'^2 &= 1 \\ \lambda\mu + \lambda'\mu' &= 0 \end{aligned} \tag{2a}$$

sein. Diese notwendige Bedingung ist aber auch hinreichend; ist sie nämlich erfüllt, so zeigt man leicht, dafs irgend zwei entsprechende Punktpaare P_1, P_2 und P_1', P_2' dieselbe Entfernung besitzen. In der Tat seien (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Koordinaten von P_1 und P_2 und (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) die der entsprechenden Punkte P_1', P_2', so hängen dieselben beziehlich durch die Gleichungen (1) zusammen, und aus ihnen ergibt sich

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \lambda\,(\xi_2 - \xi_1) + \mu\,(\eta_2 - \eta_1) \\ y_2 - y_1 &= \lambda'(\xi_2 - \xi_1) + \mu'(\eta_2 - \eta_1). \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber mit Benutzung der Gleichungen (2a)

$$\overline{P_1 P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 = \overline{P_1' P_2'}^2.$$

Durch die Abbildung mit dem Koeffizientensysteme $\begin{pmatrix}\lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix}$ werden also die Ebenen E und E' dann und nur dann kongruent abgebildet, wenn die Gleichungen (2a) erfüllt sind, oder, was dasselbe ist, wenn

$$\begin{pmatrix}\lambda, & \lambda' \\ \mu, & \mu'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0 \\ 0, & 1\end{pmatrix} \tag{3}$$

ist. Bezeichnet man aber wieder das zu S gehörige transponierte System durch $\bar{S}$, so kann unsere Gleichung in der Form

$$\bar{S}S = E \tag{4}$$

geschrieben werden. Es mufs also zunächst, wie der Übergang zu den Determinanten lehrt, die Substitutionsdeterminante $|S|$ von Null verschieden sein. Ist dies aber der Fall, so existiert ein und nur ein System, nämlich das reziproke S^{-1}, für welches die Gleichung

$$S^{-1}S = E \tag{4a}$$

erfüllt ist; und durch Vergleichung von (4) und (4a) ergibt sich also der Satz:

Ein System S ist dann und nur dann ein orthogonales, wenn das ihm konjugierte System dem reziproken gleich ist.

Setzt man in der Bedingungsgleichung für die orthogonalen Systeme

$$\bar{S} = S^{-1}$$

die einzelnen Koeffizienten einander gleich, so ergibt sich

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} \lambda, & \lambda' \\ \mu, & \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu'}{\Delta}, & -\frac{\mu}{\Delta} \\ -\frac{\lambda'}{\Delta}, & \frac{\lambda}{\Delta} \end{pmatrix},$$

wo $\Delta = \lambda\mu' - \lambda'\mu$ ist. Geht man aber in der Gleichung (4) zu den Determinanten über, so folgt weiter

$$\Delta^2 = 1, \qquad \Delta = \pm 1.$$

Es gibt also zwei verschiedene Arten kongruenter Abbildungen, nämlich solche, für welche $\Delta = \pm 1$ ist. Und zwar sind diese vollkommen dadurch charakterisiert, daſs für $\Delta = +1$ die Umlaufsrichtungen entsprechender Dreiecke und allgemeiner entsprechender Flächenteile gleich, für $\Delta = -1$ entgegengesetzt sind.

Ist $\Delta = 1$, und legt man die Ebene E' so auf E, daſs ihre Anfangspunkte 0 und 0′ sich decken, und dreht die Ebene E' dann so, daſs irgend zwei entsprechende Punkte P und P' koinzidieren, so liegen alle entsprechenden Punkte Q und Q' ebenfalls übereinander, weil jedes Dreieck $P\,O\,Q$ dem entsprechenden Dreieck $P'\,O'\,Q'$ kongruent ist und gleichen Umlaufssinn besitzt. Diese Transformation entspricht also einer einfachen Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystemes um den Anfangspunkt. Ist dagegen $\Delta = -1$, und bringt man wieder OP mit $O'P'$ zur Deckung, so liegen je zwei entsprechende Punkte Q, Q' symmetrisch zu jener Linie, da hier jene beiden Dreiecke entgegengesetzten Umlaufssinn haben. Die beiden Ebenen sind erst dadurch zur Deckung zu bringen, daſs man die zweite um $O'P'$ herumklappt. In dem zweiten Falle sind die beiden Ebenen also durch Aufeinanderlegen und bloſse Drehung nicht zur Deckung aller entsprechenden Punkte zu bringen, sondern man muſs, um dies zu erreichen, noch die dritte Dimension zu Hilfe nehmen.

Betrachten wir zunächst nur die Transformation mit der Determinante $+1$, welche also einer Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystemes entspricht, so ergibt sich aus (5) die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \lambda' \\ \mu, & \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu', & -\mu \\ -\lambda', & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda\mu' - \lambda'\mu = +1,$$

d. h. es ist $\mu' = \lambda$, $\lambda' = -\mu$. Man erhält also alle und nur die orthogonalen Systeme der ersten Art in der Form

$$S_1 = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ -\mu, & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 + \mu^2 = 1,$$

während für alle Systeme der zweiten Art sich ebenso

$$S_2 = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \mu, & -\lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 + \mu^2 = 1$$

ergibt. Hier kann λ in dem Intervalle zwischen -1 und $+1$ beliebig angenommen werden, während dann μ durch die Gleichung $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ bestimmt ist.

Um alle reellen orthogonalen Systeme der ersten und zweiten Art vollständig darzustellen, beachten wir, daſs man eine reelle Zahl t stets so wählen kann, daſs

$$t^2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

ist; dann wird

$$\lambda = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mu = \sqrt{1-\lambda^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Man erhält also alle orthogonalen Systeme und nur sie folgendermaſsen in rationaler Form ausgedrückt

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \frac{2t}{1+t^2} \\ -\frac{2t}{1+t^2}, & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2}, & -\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

Setzt man hier, was stets gestattet ist, $t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, so werden jene beiden Systeme beziehlich

$$S_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ \sin\alpha, & -\cos\alpha \end{pmatrix},$$

und von den zugehörigen Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha \qquad & x &= \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha \\ y &= -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha \qquad & y &= \xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha \end{aligned}$$

entsprechen die beiden vorderen der Drehung des Achsensystemes um den Winkel α und die beiden hinteren einer ebensolchen Drehung nebst Vertauschung der positiven Richtung der alten y-Achse.

Fünfte Vorlesung.

Arithmetische Anwendungen der Determinanten zweiter Ordnung. — Die ganzzahligen Systeme. — Gittersysteme in der Ebene. — Eindeutige Abbildung der Gitterpunkte zweier Ebenen aufeinander. — Reduktion ganzzahliger Systeme durch vordere Komposition mit Elementarsystemen. — Die reduzierten Systeme. — Die Äquivalenz der ganzzahligen Systeme. — Die Grundeigenschaften äquivalenter Gröſsen. — Die Klassenzahl der ganzzahligen Systeme. — Die verschiedenen Arten der Äquivalenz ganzzahliger Systeme. — Hintere Komposition mit unimodularen Systemen. — Vordere und hintere Komposition. — Bilineare Formen und ihre Transformation. — Die reduzierten Systeme.

§ 1.

Die in der letzten Vorlesung gegebenen Überlegungen sollen nun zunächst dazu benützt werden, um auf die von *Gauſs* eingeführten arithmetischen Prinzipien überzugehen, welche die Grundlage für einen groſsen Teil der neueren Arithmetik gebildet haben. Bis jetzt waren die Konstanten stets als beliebige positive oder negative Zahlen angenommen, und ebenso war als der Bereich der Variablen das ganze Gebiet der endlichen Zahlen angesehen worden. Geometrisch konnte so das Gebiet zweier Veränderlichen mit allen Punkten einer Ebene identifiziert werden.

Nimmt man jetzt die Konstanten nicht mehr als beliebige reelle Gröſsen, sondern als willkürliche positive oder negative ganze Zahlen und betrachtet auch als das Gebiet der Veränderlichen nicht mehr alle endlichen, sondern nur noch alle positiven oder negativen ganzen Zahlen, so treten hier durch die Forderung der Ganzzahligkeit ganz neue Prinzipien hinzu, deren systematische Darstellung und Ausgestaltung zuerst von *Gauſs* in seinen *Disquisitiones arithmeticae* durchgeführt worden ist. Den Bereich einer Variablen x kann man dann mit dem Systeme von Punkten identifizieren, deren Abscissen ganze Zahlen sind, d. h. mit einer Punktreihe, welche den Nullpunkt enthält und für die die Entfernung benachbarter Punkte gleich der Längeneinheit ist. Dem Gebiet zweier Variablen (x, y) entspricht hier das Gittersystem aller Punkte, deren Koordinaten ganze Zahlen sind. Dieselben sind die sämtlichen Schnittpunkte der durch die ganzzahligen Punkte jeder Achse zu der anderen gezogenen Parallelen.

Es seien nun in den beiden Abbildungsgleichungen

$$x = ax' + by', \qquad y = a'x' + b'y'$$

die vier Substitutionskoeffizienten des Systemes

$$(1) \qquad S = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$$

ganze Zahlen, dann entspricht jedem Gitterpunkte (x', y') der Ebene E' offenbar ein und nur ein Gitterpunkt (x, y) von E, jedoch diese Beziehung ist auch dann nicht notwendig umkehrbar, wenn die Determinante von S von Null verschieden ist. Damit nämlich auch ganzzahligen Werten von (x, y) ebensolche von (x', y') entsprechen, ist offenbar notwendig und hinreichend, daſs auch die inverse Substitution

$$\begin{aligned} x' &= \quad \frac{b'}{\Delta} x - \frac{b}{\Delta} y \\ y' &= -\frac{a'}{\Delta} x + \frac{a}{\Delta} y \end{aligned}$$

ganzzahlige Koeffizienten besitze, d. h. daſs nicht nur das System S in (1), sondern auch sein reziprokes

$$(1\text{a}) \qquad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b'}{\Delta}, & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{a'}{\Delta}, & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

ein ganzzahliges sei. Also ist jedenfalls notwendig, daſs die Determinanten Δ und $\frac{1}{\Delta}$ von S und S^{-1} von Null verschiedene ganze Zahlen sind. Dies ist aber nur unter der Bedingung

$$\Delta = \frac{1}{\Delta} = \pm 1$$

der Fall, und aus der Darstellung (1a) des reziproken Systemes geht hervor, daſs dieses alsdann auch wirklich ganzzahlig, d. h. daſs die beiden Gittersysteme von E und E' unter dieser Bedingung und unter ihr allein eindeutig aufeinander abgebildet werden.

Bei dieser spezielleren Art der Abbildung besitzen also entsprechende Polygone stets denselben Flächeninhalt, und der Umlaufssinn entsprechender Figuren ist derselbe oder der entgegengesetzte, je nachdem $\Delta = +1$ oder $\Delta = -1$ ist. Später werden wir beide Arten der Abbildung genauer zu unterscheiden haben, vorderhand wollen wir nur die erste, für welche

$$\Delta = +1$$

ist, genauer ins Auge fassen.

§ 2.

Im vorigen Abschnitte wurde gezeigt, daſs wenn zwei ganzzahlige Variablenpaare durch die ganzzahligen Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= a\,x' + b\,y' \\ y &= a'x' + b'y' \end{aligned}$$

zusammenhängen, der gesamte Bereich des einen dann und nur dann auf dem des anderen abgebildet wird, wenn die Determinante $ab' - a'b = \pm 1$ ist. Hiernach liegt die Frage nahe, in welcher Beziehung der Bereich von (x, y) zu dem von (x', y') steht, wenn jene Determinante eine beliebige ganze Zahl ist. Aus jenen Gleichungen geht unmittelbar hervor, daſs jedem ganzzahligen Systeme (x', y') ein und nur ein ebensolches System (x, y) entspricht. Dagegen wird einem ganzzahligen (x, y) im allgemeinen ein gebrochenes (x', y'), d. h. dem ganzzahligen Gittersysteme der (x, y) ein rational gebrochenes Gittersystem der (x', y') entsprechen.

Bei dieser Untersuchung kann man sich die Aufgabe auf dem folgenden Wege erleichtern, und dies bildet eben den Eingang in die Fragen, mit deren Beantwortung wir uns jetzt beschäftigen wollen. Ersetzt man die Variablen (x, y) durch neue Variablen (x_1, y_1) vermittelst der ganzzahligen Gleichungen

$$(2)\qquad (x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{pmatrix} (x, y),$$

deren Determinante $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist, so entspricht das Gebiet von (x, y) vollständig dem Gebiete von (x_1, y_1), und auch der Umlaufssinn entsprechender Polygone ist derselbe; man erhält also auch die Lösung unserer Aufgabe, wenn man die Beziehung der (x_1, y_1) zu den (x', y') untersucht. Diese wird aber vermittelt durch die Gleichungen

$$(3)\qquad (x_1, y_1) = \left[\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha' \\ \beta, & \beta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}\right] (x', y').$$

Man kann also das gestellte Problem, ohne es im geringsten zu ändern, dadurch vereinfachen, daſs man das System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ vorn mit einem beliebigen ganzzahligen Systeme mit der Determinante eins komponiert.

Diese Bemerkung leitet nun zu der Aufgabe über, ein vorgelegtes ganzzahliges System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ durch vordere Komposition mit einem beliebigen ganzzahligen Systeme mit der Determinante eins auf eine

möglichst einfache, nicht weiter reduzierbare Form zu bringen. Diese Aufgabe ist der früher durchgeführten Dekomposition der allgemeinen Systeme analog; sie führt jedoch hier zu vollkommen anderen Resultaten.

Auch hier wollen wir die gestellte Aufgabe nicht auf einmal, sondern schrittweise dadurch lösen, daſs wir mit „elementaren“ Systemen der Determinante eins so komponieren, daſs das resultierende System in einem gleich anzugebenden Sinne möglichst einfach wird. Als Elementarsysteme wollen wir auch jetzt die auf S. 46 betrachteten von der Determinante eins nehmen

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Jedoch können wir gleich das allgemeinere

$$\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \tag{4a}$$

hinzurechnen und zwar sowohl für ein positives, als auch für ein negatives, aber ganzzahliges t. Im ersten Falle ist nämlich

$$\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^t;$$

ist dagegen t eine negative ganze Zahl $-\tau$, so ist

$$\begin{pmatrix} 1, & -\tau \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^\tau,$$

und aus der auf S. 48 angegebenen Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \tag{4b}$$

ergibt sich direkt, daſs $\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ auch in diesem zweiten Falle durch die beiden Systeme (4) darstellbar ist.

Ich bemerke gleich, daſs die zu den Elementarsystemen (4) reziproken Systeme

$$\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

offenbar ebenfalls durch die Systeme (4) darstellbar sind. Geht also ein System S durch vordere Komposition mit einer Anzahl von Elementarsystemen (4) in ein anderes S' über, besteht also eine Gleichung

$$E\,E' \ldots E^{(r)}\,S = S',$$

wo die $E^{(i)}$ irgendwelche Elementarsysteme (4) bedeuten, so folgt aus ihr durch Auflösung nach S eine andere

$$S = E^{(r)^{-1}} E^{(r-1)^{-1}} \dots E^{-1} S',$$

welche lehrt, daſs auch umgekehrt S' durch vordere Komposition mit Elementarsystemen in S übergeführt werden kann.

Komponiert man ein beliebiges System vorn mit einem der beiden Systeme

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

so bewirkt das erste eine Vertauschung der Zeilen mit einer Zeichenänderung der ersten, das zweite bewirkt, daſs zur ersten Zeile das t-fache der zweiten addiert wird.

Es kommt nun hier keineswegs darauf an, diese Zerlegung in jedem einzelnen Falle wirklich anzugeben, sondern allein darauf, zu entscheiden, welches die einfachste Form ist, auf die das allgemeine System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ durch successive Kompositionen dieser Art stets gebracht werden kann. Zunächst kann man durch eine solche Komposition erreichen, daſs das Element a' verschwindet. Ist das nämlich nicht der Fall, so kann man zuerst durch eine Komposition der ersten Art, also eine Zeilenvertauschung, erreichen, daſs $|a'| \leqq |a|$ wird, falls dies nicht schon von selbst der Fall ist. Alsdann kann man in einem Elementarsysteme der zweiten Art $\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ die ganze Zahl t so bestimmen, daſs in dem komponierten Systeme

$$\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ta', & b + tb' \\ a' \;\;, & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}, & \bar{b} \\ a', & b' \end{pmatrix}$$

das neue erste Glied $\bar{a}$ absolut genommen kleiner ist als a'. Bringt man nun durch Komposition mit einem Vertauschungssysteme

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}, & \bar{b} \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a', & -b' \\ \bar{a}, & \bar{b} \end{pmatrix}$$

die erste Zeile wieder an die Stelle der zweiten, so erhält man ein neues System, in welchem das an Stelle von a' stehende Glied $\bar{a}$ seinem absoluten Werte nach verkleinert ist; und diese Verkleinerung kann man offenbar so lange fortsetzen, bis man nach einer bestimmten Anzahl von Kompositionen an Stelle von a' die Null erhält, bis man also zu einem Systeme $\begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix}$ gelangt. Dieses System kann man noch so umgestalten, daſs das erste Glied nicht negativ ist. Sollte dies nämlich nicht schon der Fall sein, so geht das System durch eine Komposition mit $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ über in

$$\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d, & r\\ 0, & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d, & -r\\ 0, & -d'\end{pmatrix},$$

in welchem das erste Glied das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Endlich kann man, und dies ist der letzte mögliche Sehritt, aus dem bis jetzt erhaltenen Systeme $\begin{pmatrix}d, & r\\ 0, & d'\end{pmatrix}$ ein neues herleiten, in welchem die Zahl r positiv und kleiner als der absolute Wert von d' ist; durch Komposition mit einem Systeme der zweiten Art erhält man nämlich

$$\begin{pmatrix}1, & t\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d, & r\\ 0, & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d, & r+td'\\ 0, & d'\end{pmatrix},$$

und man kann nunmehr die ganze Zahl t so bestimmen, daſs $r+td'$ positiv und kleiner als der absolute Wert von d' ist. Man erhält also das wichtige Resultat, daſs jedes ganzzahlige System durch vordere Komposition mit einer Anzahl der beiden Elementarsysteme

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

in ein „reduziertes" System

$$\begin{pmatrix}d, & r\\ 0, & d'\end{pmatrix}$$

transformiert werden kann, welches durch die beiden Eigenschaften

$$\text{(A)}\qquad \begin{gathered} d>0\\ 0\leqq r<|d'| \end{gathered}$$

vollständig charakterisiert ist.

Nach der auf S. 67 unten gemachten Bemerkung geht dann aber auch umgekehrt das reduzierte System durch vordere Komposition mit Elementarsystemen in das gegebene $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ über; es besteht also der Satz:

Für jedes ganzzahlige System $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ besteht eine Gleichung von der Form

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}&=E\,E'\ldots E^{(r)}\begin{pmatrix}d, & r\\ 0, & d'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d, & r\\ 0, & d'\end{pmatrix},\end{aligned}$$

wo $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ aus lauter Elementarsystemen besteht. Man kann also jedes ganzzahlige System $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ dadurch bilden, daſs man ein bestimmtes reduziertes System vorn mit einer Folge aus den beiden Elementarsystemen komponiert.

Geht man in dieser Gleichung von den Systemen zu ihren Determinanten über und berücksichtigt dabei, daſs die Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist, weil sie ja aus lauter Systemen mit der Determinante eins komponiert ist, so ergibt sich für d und d' die Gleichung

$$dd' = ab' - a'b. \tag{6}$$

Diese beiden ganzen Zahlen d und d' sind also komplementäre Divisoren der Determinante.

Es besitze das betrachtete System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ speziell die Determinante eins; ein solches werde ein **unimodulares System** genannt. Dann folgt aus den drei Gleichungen

$$dd' = 1$$
$$d > 0$$
$$0 \leqq r < d',$$

daſs $d = d' = 1$ und $r = 0$, d. h. daſs hier das reduzierte System das Einheitssystem ist.

In diesem Falle geht also unsere Transformationsgleichung (5) über in

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = E\,E' \ldots E^{(r)} \tag{5a}$$

Jedes ganzzahlige System mit der Determinante eins ist gleich dem Produkte aus einer Folge von Elementarsystemen $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$.

Der letzte Satz liefert einen sehr einfachen Weg zur Lösung der wichtigen *Diophant*ischen Gleichung

$$ab' - a'b = 1 \tag{7}$$

in ganzen Zahlen; da man nämlich **jedes** System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ mit der Determinante eins nach dem vorigen Satze dekomponieren kann in die beiden Elementarsysteme $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, so wird man alle Systeme mit der Determinante eins, d. h. alle Lösungen der Gleichung (7) und nur sie erhalten, wenn man diese beiden Systeme beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge miteinander komponiert. Freilich ist es auf diesem Wege nicht zu vermeiden, daſs dasselbe Wertsystem mehr als einmal auftritt.

Bildet man z. B. das Kompositionsresultat

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & -3\\0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}16, & 5\\3, & 1\end{pmatrix},$$

so besteht in der Tat die Gleichung

$$16 \,.\, 1 - 5 \,.\, 3 = +1.$$

Anderseits gelangt man aber zu demselben Systeme durch die Komposition

$$\begin{pmatrix}16, & 5\\3, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 6\\0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1, & -2\\0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1\\1, & 0\end{pmatrix},$$

welche von der vorigen völlig verschieden ist.

§ 3.

Der Ausgangspunkt für die Untersuchungen des vorigen Abschnittes war die Frage, welche Wertsysteme (x', y') dem vollständigen Gittersysteme der Variablen (x, y) entsprechen, wenn diese mit jenen durch die Gleichungen

$$(1) \qquad (x, y) = \begin{pmatrix}a, & b\\a', & b'\end{pmatrix}(x', y')$$

zusammenhängen. Wenn nun das Variablenpaar (x_1, y_1) mit (x, y) durch ein Gleichungssystem

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\\gamma, & \delta\end{pmatrix}(x, y)$$

verbunden ist, dessen Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, so entspricht dem ganzzahligen Bereiche von (x, y) eindeutig der von (x_1, y_1). Betrachtet man jetzt das Gleichungssystem

$$(1\text{a}) \qquad (x_1, y_1) = \left[\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\\gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\a', & b'\end{pmatrix}\right](x', y'),$$

durch welches (x_1, y_1) mit (x', y') in Verbindung steht, so entspricht dem ganzzahligen Bereiche der (x_1, y_1) genau derselbe Bereich von (x', y') wie dem von (x, y). Durch die völlig verschiedenen Gleichungen (1) und (1a) oder was dasselbe ist, durch die ganz verschiedenen Systeme

$$(2) \qquad \begin{pmatrix}a, & b\\a', & b'\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\\gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\a', & b'\end{pmatrix}$$

wird in diesem Falle daher wörtlich dieselbe Aufgabe gestellt. Für diese Aufgabe also sind alle jene Systeme (2) einander äquivalent. Dieses gedankliche Resultat rechtfertigt die folgende Definition:

> **Ein ganzzahliges System soll einem anderen äquivalent heifsen, wenn das erste in das zweite übergeht, indem es vorn mit einem ganzzahligen Systeme von der Determinante eins komponiert wird.**

Diese Definition kann in der folgenden Formel dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Für die äquivalenten Systeme bestehen die folgenden Sätze, welche überhaupt für jede andere Art von Äquivalenz erfüllt sein müssen:

I. Ist ein System $S_1 \sim S_2$, so ist auch $S_2 \sim S_1$.

Denn die Voraussetzung $S_1 \sim S_2$ fällt zusammen mit der Existenz einer Kompositionsgleichung

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} S_2,$$

wo $(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1$ ist. Komponiert man aber diese Gleichung vorn mit dem zu $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ reziproken Systeme, welches nach S. 43 gleich

$$\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix},$$

und dessen Determinante auch gleich eins ist, so folgt

$$S_2 = \begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix} S_1,$$

d. h. nach unserer Definition $S_2 \sim S_1$.

II. Jedes System ist sich selbst äquivalent, da ja

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} S$$

ist.

III. Sind zwei Systeme S_1 und S_2 einem dritten S_3 äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent.

Denn nach der Voraussetzung ist ja

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} S_1 = S_3 = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} S_2,$$

d. h. es ist

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} S_1 = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} S_2,$$

wo

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$$

ist, und hieraus folgt, wenn man wieder vorn mit dem reziproken Systeme $\begin{pmatrix} \delta', & -\beta' \\ -\gamma', & \alpha' \end{pmatrix}$ komponiert

$$\begin{pmatrix} \delta', & -\beta' \\ -\gamma', & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} S_1 = S_2,$$

d. h. es ist in der Tat $S_1 \sim S_2$.

Bei dieser Auffassung der Äquivalenz kann man die im vorigen Paragraphen gefundene Dekomposition eines ganzzahligen Systemes in elementare und ein reduziertes durch folgenden Satz charakterisieren:

Jedes System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ ist einem reduzierten $\begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix}$ äquivalent, in welchem

$$d\,d' = a\,b' - a'b, \qquad d > 0, \qquad 0 \leqq r < |d'|$$

ist.

Denn in der Tat wird ja das eine gleich dem anderen, wenn man es vorn mit einem geeignet gewählten unimodularen Systeme komponiert.

Bei dieser Festsetzung der Äquivalenz ist immer eine große Anzahl von Systemen als äquivalent zu betrachten. Ob zwei Systeme in dieser Weise zusammengehören, kann man dadurch entscheiden, daß man für beide die äquivalenten reduzierten Systeme aufsucht; sind diese dann einander gleich, so sind auch die ursprünglichen Systeme äquivalent. Indessen könnten aber auch zwei solche reduzierten Systeme einander äquivalent sein, ohne identisch zu sein. Man kann aber sehr leicht zeigen, daß diese letzte Annahme unzulässig ist.

Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir, daß ein reduziertes System bei einer weiteren Komposition mit einem unimodularen Systeme nicht reduziert bleiben kann. Wäre nämlich $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ ein unimodulares System, für welches das komponierte

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha d, & \alpha r + \beta d' \\ \gamma d, & \gamma r + \delta d' \end{pmatrix}$$

wieder reduziert, für welches also

$$\alpha d > 0, \qquad \gamma d = 0$$

ist, während

$$d > 0$$

ist, so müßte $\gamma = 0$, $\alpha > 0$ und also wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

$$\alpha = \delta = 1, \qquad \gamma = 0$$

sein; alsdann geht aber jene Kompositionsgleichung über in

$$\begin{pmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d, & r + \beta d' \\ 0, & d' \end{pmatrix},$$

und da in dieser Gleichung beide Systeme reduziert sein sollen, so bestehen die beiden Ungleichungen

$$0 \leqq \left\{ \begin{matrix} r \\ r + \beta d' \end{matrix} \right\} < |d'|,$$

d. h. es mufs auch β notwendig gleich Null, jenes Kompositionssystem also das Einheitssystem sein. Man erhält also jetzt den wichtigen Satz:

Zwei Systeme sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre reduzierten identisch sind.

Eine notwendige Bedingung für die Äquivalenz zweier ganzzahligen Systeme S und S' ist offenbar die Gleichheit ihrer Determinanten. Aber nach den soeben gefundenen Ergebnissen ist diese Bedingung keineswegs hinreichend. Wir stellen uns nun die Frage, wie viele nicht äquivalenten Systeme einer und derselben Determinante Δ existieren. Zur Lösung derselben brauchen wir jetzt nur alle verschiedenen reduzierten Systeme der Determinante Δ aufzustellen, da jedes andere einem und nur einem reduzierten äquivalent ist.

Ist zunächst $\Delta = 1$, so müssen, wie bereits oben erwähnt wurde, für ein reduziertes System $\begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix}$ die Bedingungen

$$d d' = 1, \quad d > 0$$

erfüllt sein, d. h. es ist

$$d = d' = 1,$$

und aus $0 \leqq r < 1$ folgt $r = 0$. Für diesen Fall existiert also nur ein reduziertes System, das Einheitssystem $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$.

Aber schon wenn $\Delta = p$ ist, wo p eine Primzahl bedeutet, erhält man aus den Bedingungen für die reduzierten Systeme die folgenden Möglichkeiten

$$\begin{array}{lll} d = p, & d' = 1, & r = 0 \\ d = 1, & d' = p, & r = 0, 1, \ldots p - 1. \end{array}$$

Die Anzahl der reduzierten Systeme ist also hier gleich $p + 1$.

Ist Δ gleich dem Produkte zweier verschiedener Primzahlen p und q, so liefert eine entsprechende Diskussion die Fälle

$$\begin{array}{lll} d = pq, & d' = 1, & r = 0 \\ d = p, & d' = q, & r = 0, 1 \ldots q - 1 \\ d = q, & d' = p, & r = 0, 1 \ldots p - 1 \\ d = 1, & d' = pq, & r = 0, 1 \ldots\ldots\ldots pq - 1; \end{array}$$

die Anzahl R der reduzierten Systeme ist also

$$R = 1 + p + q + pq.$$

Auch im allgemeinen Falle kann man leicht durch eine entsprechende Diskussion eine vollständige Reihe der reduzierten Systeme aufstellen und ihre Anzahl finden. Zu diesem Zwecke hat man nur für eine positive Determinante diese auf alle möglichen Weisen in das Produkt zweier komplementären positiven Divisoren $d d'$ zu zerlegen und für jede Zerlegung r die d' Werte $0, 1, \dots d' - 1$ beizulegen. Die Anzahl $R(\Delta)$ aller reduzierten Systeme der positiven Determinante Δ ist also im allgemeinsten Falle

$$R(\Delta) = \Sigma\, d',$$

d. h. sie ist der Summe aller verschiedenen Teiler der Determinante gleich. Ist $\Delta = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \dots p_k^{h_k}$, die Zerlegung der Determinante in ihre Primfaktoren, so ergibt eine einfache Überlegung für $R(\Delta)$ die folgende Darstellung

$$R(\Delta) = \frac{p_1^{h_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{h_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Ist die Determinante negativ und gleich $-\Delta$, so gehen die reduzierten Systeme der Determinante $-\Delta$ aus denjenigen für $+\Delta$ einfach dadurch hervor, daſs man in allen für d' den negativen Wert $-d'$ setzt, und alles übrige unverändert läſst. Die Anzahl $R(-\Delta)$ der reduzierten Systeme ist also dieselbe wie für die Determinante Δ.

In den Naturwissenschaften pflegt man Objekte, die durch irgend eine gemeinsame Eigenschaft miteinander verwandt sind, in eine Klasse oder Gattung oder Familie zu vereinigen. In derselben Weise sollen hier alle äquivalenten Systeme zu einer und derselben Klasse gerechnet werden. Alle ganzzahligen Systeme ordnen sich dann zunächst nach dem Werte ihrer Determinanten, und die Systeme gleicher Determinante zerfallen dann wieder in die Klassen äquivalenter Systeme, deren Anzahl mit der soeben ermittelten Anzahl reduzierter Systeme übereinstimmt.

Obwohl die im § 2 betrachtete Abbildungsaufgabe zunächst nur darum Interesse für uns besaſs, weil sie uns in die Komposition der Systeme einführte, so mag sie doch noch mit den hier gefundenen Hilfsmitteln vollständig untersucht werden, weil sie ein gutes Beispiel für die Verwertung derselben gibt. Es sei also die Abbildung der Ebene E' auf die Ebene E durch die Gleichungen

$$(3) \qquad (x, y) = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} (x', y')$$

gegeben, und wir fragen, welches Punktsystem (x', y') in E' dem ganzzahligen Gittersysteme in E entspricht. Dann können wir an Stelle der Gleichungen (1) von vornherein die reduzierten

$$(x, y) = \begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix} (x', y'),$$

d. h.

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= dx' + ry' \\ y &= \qquad d'y' \end{aligned}$$

wählen, wenn $\begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix}$ das zu $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ äquivalente reduzierte System bedeutet, oder seine Auflösung

$$(4a) \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{d} x - \frac{r}{dd'} y \\ y' &= \qquad \frac{1}{d'} y \end{aligned} \qquad \frac{1}{dd'} = \frac{1}{\Delta}, \ \left|\frac{r}{dd'}\right| < \frac{1}{d}.$$

Dann entsprechen den drei Grundpunkten (0, 0), (1, 0), (0, 1) der Ebene E mit den Koordinaten

$$(x = 0,\ y = 0), \quad (x = 1,\ y = 0), \quad (x = 0,\ y = 1)$$

die drei Grundpunkte $(0, 0)'$, $(1, 0)'$, $(0, 1)'$ der Ebene E' mit den Koordinaten

$$(x' = 0,\ y' = 0), \ \left(x' = \frac{1}{d},\ y' = 0\right), \ \left(x' = -\frac{r}{dd'},\ y' = \frac{1}{d'}\right).$$

Wir fixieren diese Punkte in der E'-Ebene, konstruieren das Parallelogramm, dessen drei Ecken $(0, 0)'$, $(1, 0)'$, $(0, 1)'$ sind, bezeichnen seine vierte Ecke durch $(1, 1)'$ und ziehen nun alle äquidistanten Parallelen zu den Seiten dieses Grundparallelogrammes. Dadurch erhalten wir in E' ebenfalls ein vollständiges Gittersystem; bezeichnen wir dann mit $(\lambda, \mu)'$ den Schnittpunkt der λ^{ten} Parallele zu $\overline{(0,0)', (0,1)'}$ und der μ^{ten} Parallele zu $\overline{(0,0)', (1,0)'}$, so sind ihre Koordinaten offenbar: $\left(x' = \frac{1}{d} \lambda - \frac{r}{dd'} \mu,\ y' = \frac{1}{d'} \mu\right)$, d. h. der Punkt $(\lambda, \mu)'$ in E' entspricht nach (1a) dem Gitterpunkte (λ, μ) in E, das quadratische Gittersystem in E ist also eindeutig auf das parallelogrammatische System in E' abgebildet. Ebenso leicht erkennt man, daſs die Grundlinie und die Höhe des Grundparallelogrammes $((0, 0)', (1, 0)', (1, 1)', (0, 1)')$ in E' bezw. $\frac{1}{d}$ und $\frac{1}{d'}$ sind, also sein Inhalt und seine Umlaufsrichtung durch $\frac{1}{\Delta}$ bestimmt sind, und daſs für den Neigungswinkel φ seiner Seiten die Gleichung

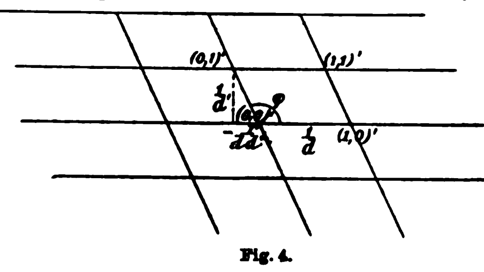


Fig. 4.

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{d}{r}$$

besteht.

§ 4.

Dem im vorigen Abschnitte erörterten Begriffe der Äquivalenz haftete entsprechend der Natur der speziellen Aufgabe die Willkür an, dafs zwei Systeme nur dann als äquivalent bezeichnet wurden, wenn das eine in das andere durch vordere Komposition mit einem unimodularen Systeme übergeführt werden konnte. Mit gleicher Berechtigung kann man auch ein System einem zweiten äquivalent nennen, wenn es in jenes durch hintere Komposition mit einem unimodularen ganzzahligen Systeme übergeführt werden kann. Diese Definition der Äquivalenz wäre somit durch die Gleichung

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

erklärt. Hier kann man genau wie vorher zeigen, dafs jedes ganzzahlige System mit der Determinante Δ einem und nur einem „reduzierten“ Systeme von der Form

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} d, & 0 \\ r, & d' \end{pmatrix}$$

äquivalent, dessen Elemente durch die drei Bedingungen

$$(2a) \qquad \begin{gathered} dd' = \Delta \\ d > 0 \\ |d'| > r \geqq 0 \end{gathered}$$

vollständig bestimmt sind.

Auf diese Art der Äquivalenz wird man z. B. geführt, wenn man sich die der vorigen entgegengesetzte Aufgabe stellt, zu bestimmen, welche ganzzahligen Systeme (x', y') dem ganzen Bereich der ganzzahligen Variablen (x, y) unter der Voraussetzung der Gleichungen

$$(3) \qquad (x', y') = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} (x, y)$$

entsprechen. Ersetzt man nämlich hier (x, y) durch neue Variable $(\bar{x}, \bar{y})$, welche mit ihnen durch eine beliebige unimodulare Substitution

$$(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y})$$

zusammenhängen, so entsprechen die vollständigen Gittersysteme beider Variablenpaare einander eindeutig. Vergleicht man also die Gleichungen (3) mit den anderen

(3a) $$(x', y') = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}),$$

durch welche (x', y') mit $(\bar{x}, \bar{y})$ zusammenhängen, so entspricht dem ganzzahligen Bereich von $(\bar{x}, \bar{y})$ und (x, y) genau derselbe Bereich von (x', y'); für diese Aufgabe besteht also in der Tat die Äquivalenz (1).

Um nun jene Aufgabe zu lösen, kann man ebenso wie vorher von der reduzierten Form des Systemes $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$, d. h. von den Gleichungen

(4) $$\begin{aligned} x' &= dx \\ y' &= rx + d'y \end{aligned}$$

ausgehen, und man zeigt ganz ähnlich, daſs auch hier dem quadratischen Gittersysteme der Punkte (λ, μ) in E ein parallelogrammatisches Gittersystem $(\lambda, \mu)'$ in E' entspricht. Hier entsprechen nämlich den drei Grundpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ die Punkte: $(0, 0)'$, $(1, 0)'$, $(0, 1)'$ mit den Koordinaten

$$(x' = 0,\ y' = 0), \quad (x' = d,\ y' = r), \quad (x' = 0,\ y' = d');$$

teilt man also, von diesen Punkten ausgehend, die ganze Ebene E' durch äquidistante Parallelen in lauter kongruente Parallelogramme und bezeichnet wie oben ihre Ecken durch $(\lambda, \mu)'$, so ist wieder das ganzzahlige Gittersystem (λ, μ) in E eindeutig auf das Gittersystem in E' abgebildet, und hier sind Höhe und Grundlinie eines Grundpolygones bezw. gleich d und d', sein Inhalt ist $dd' = \Delta$, und der Neigungswinkel φ seiner Seiten ist durch die Gleichung

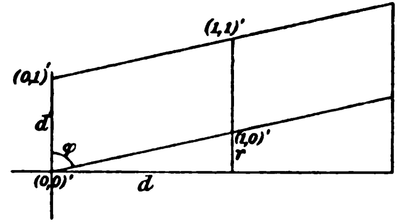


Fig. 5.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{r}$$

bestimmt.

Auf eine dritte Erklärung der Äquivalenz ganzzahliger Systeme, welche in gewissem Sinne die beiden oben gegebenen als spezielle Fälle enthält, wird man durch die folgende Aufgabe geführt:

Betrachtet man nicht mehr die beiden linearen Funktionen

$$\xi = ax + by, \quad \eta = a'x + b'y$$

für sich, sondern bildet aus ihnen wiederum eine homogene Funktion mit variablen Koeffizienten

(5) $$B = axx' + a'xy' + byx' + b'yy',$$

so hat diese die charakteristische Eigenschaft, daſs sie homogen und linear ist, sowohl in Bezug auf (x, y), als auch auf (x', y'). Aus diesem Grunde hat *Jacobi* eine solche Funktion eine bilineare Form genannt. Die Determinante des Koeffizientensystemes $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$$

heiſst hier die Determinante der bilinearen Form.

Die Form B können wir in leicht verständlicher Weise durch

$$B = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} (x, y \mid x', y')$$

ausdrücken; faſst man das eine Mal die mit x, y, das andere Mal die mit x', y' multiplizierten Glieder zusammen, so kann sie in jeder der beiden Formen dargestellt werden

$$B = \xi x' + \eta y' = \xi' x + \eta' y,$$

wo für die homogenen Funktionen (ξ, η) bezw. (ξ', η') die Gleichungen

$$\text{(5a)} \qquad \begin{aligned} \xi &= a\,x + b\,y, & \xi' &= a x' + a' y' \\ \eta &= a' x + b' y, & \eta' &= b x' + b' y' \end{aligned}$$

bestehen. Wir wollen x, y das erste, x', y' das letzte Variablenpaar und $S = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ das Koeffizientensystem der bilinearen Form nennen.

Ist d der gröſste gemeinsame Teiler der vier Koeffizienten (a, b, a', b'), so daſs also $a = d\,a_0$, $b = d\,b_0$, $a' = d\,a_0'$, $b' = d\,b_0'$ und (a_0, b_0, a_0', b_0') relative Primzahlen sind, so heiſst d der Teiler der bilinearen Form, und es ist

$$B(x, y \mid x', y') = d \,.\, B_0(x, y \mid x', y') = d(a_0 x x' + a_0' x y' + b_0 y x' + b_0 x y'),$$

wo $B_0(x, y \mid x', y')$ eine sogenannte primitive Form, nämlich eine Form ist, deren Teiler eins ist. Es soll auch d der Teiler des Systemes $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ genannt werden.

Man kann sich nun wieder die Frage vorlegen, welche Werte von B den ganzzahligen Bereichen von (x, y) und von (x', y') entsprechen, und hier kann man offenbar jedes der beiden Variablensysteme durch ein äquivalentes ersetzen, ohne daſs die Aufgabe und ihre Lösung im geringsten geändert wird.

Wir wollen daher zuerst untersuchen, wie sich die bilineare Form ändert, wenn man die ersten oder die zweiten Variablen linear transformiert.

Führt man zunächst an Stelle von (x, y) die neuen Variablen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durch die Substitution

$$x = \alpha\,\mathfrak{x} + \beta\,\mathfrak{y}$$
$$y = \gamma\,\mathfrak{x} + \delta\,\mathfrak{y}$$

ein, so wird das Koeffizientensystem von ξ, η in (5a), mithin auch das mit ihm übereinstimmende der Form B in (5) nach den oben gemachten Bemerkungen hinten mit dem Substitutionssystem komponiert; also geht B über in

$$B = \left(\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\right)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \mid x, y) = (a\alpha + b\gamma)\,\mathfrak{x}\,x' + (a'\alpha + b'\gamma)\,\mathfrak{x}\,y' \\ + (a\beta + b\delta)\,\mathfrak{y}\,x' + (a'\beta + \beta'\delta)\,\mathfrak{y}\,y'.$$

Ersetzt man dagegen in der ursprünglichen Form x', y' durch die neuen Variablen $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$, welche mit ihnen durch die Transformation

$$x' = \alpha'\mathfrak{x}' + \beta'\mathfrak{y}'$$
$$y' = \gamma'\mathfrak{x}' + \delta'\mathfrak{y}'$$

zusammenhängen, so geht $B = x'\xi + y'\eta$ über in

$$(\alpha'\xi + \gamma'\eta)\,\mathfrak{x}' + (\beta'\xi + \delta'\eta)\,\mathfrak{y}' = (\alpha' a + \gamma' a')\,x\,\mathfrak{x}' + (\beta' a + \delta' a')\,x\,\mathfrak{y}' \\ + (\alpha' b + \gamma' b')\,y\,\mathfrak{x}' + (\beta' b + \delta' b')\,y\,\mathfrak{y}'.$$

Jene neue Transformation entspricht also einer Substitution der ξ, η, jedoch mit dem transponierten Koeffizientensysteme

$$\begin{pmatrix} \alpha', & \gamma' \\ \beta', & \delta' \end{pmatrix}.$$

Nach den vorher abgeleiteten Sätzen geht aber durch eine solche Transformation das Koeffizientensystem $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ über in das folgende

$$\begin{pmatrix} \alpha', & \gamma' \\ \beta', & \delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}.$$

Es ergeben sich also die beiden Sätze:

I. Transformiert man das erste Variablenpaar (x, y) durch eine lineare Transformation, so geht das Koeffizientensystem der neuen Form aus dem der ursprünglichen Form durch hintere Komposition mit dem Substitutionssysteme $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ hervor.

II. Transformiert man dagegen das zweite Variablenpaar (x', y'), so geht das Koeffizientensystem der neuen Form aus dem ursprünglichen durch vordere Komposition mit dem Systeme $\begin{pmatrix} \alpha', & \gamma' \\ \beta', & \delta' \end{pmatrix}$ hervor, welches zum Substitutionssysteme $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$ konjugiert ist.

Transformiert man nun einmal die ersten Variablen x, y und dann die zweiten Variablen x', y', so erhält man eine neue Form $B(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \mid \mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$, deren Koeffizientensystem jetzt offenbar das folgende ist

$$\begin{pmatrix} \alpha', & \gamma' \\ \beta', & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}.$$

Besitzen nun jene beiden Transformationsgleichungen speziell ganzzahlige Koeffizienten, und sind ihre Determinanten gleich eins, so entsprechen dem vollständigen Bereich dieses ganzzahligen Variablenpaares $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ genau dieselben Werte der transformierten Form, wie sie die ursprüngliche Form für alle ganzzahligen Werte der Variablen (x, y, x', y') besafs. Die beiden Koeffizientensysteme der ursprünglichen und der transformierten Form sind also für diese Aufgabe absolut äquivalent. Da nun sowohl das erste Substitutionssystem als auch das zweite ein ganz beliebiges unimodulares ganzzahliges System ist, so kann man diese neue Äquivalenzbestimmung folgendermafsen in Worte fassen:

> Zwei Systeme sollen äquivalent genannt werden, wenn das eine dadurch in das andere übergeführt werden kann, dafs man es vorn und hinten mit einem beliebigen ganzzahligen unimodularen Systeme komponiert.

Man kann sich nun ebenfalls die Aufgabe stellen, für ein beliebiges ganzzahliges System ein möglichst einfaches reduziertes aufzusuchen. Hierzu gelangt man entweder durch Benützung der vorhin gefundenen reduzierten Formen bei der vorderen und bei der hinteren Komposition, oder aber auf dem folgenden direkten Wege, dessen Prinzip auch auf das allgemeinste analoge Problem angewendet werden kann.

Wir beweisen nämlich den folgenden Satz:

> Jedes ganzzahlige System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ ist einem eindeutig bestimmten „reduzierten Diagonalsystem“ $\begin{pmatrix} d_1, & 0 \\ 0, & d_1 d_2 \end{pmatrix}$ äquivalent, dessen erstes Element positiv und ein Teiler des letzten ist.

Man gelangt zu diesem Systeme, indem man das erste Element a durch die gestatteten Elementartransformationen so klein als möglich zu machen sucht, ohne dafs es Null wird. Zunächst kann man erreichen, dafs a positiv und nicht kleiner wird, als der absolute Wert von jedem der anderen von Null verschiedenen Elemente; denn zuerst kann man durch Reihenvertauschungen unter gleichzeitiger Zeichenänderung einer Reihe das absolut kleinste unter den vier Elementen an die erste Stelle bringen, und falls es dann negativ sein

sollte, sein Vorzeichen durch Komposition mit $\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}$ umkehren. Ist dann eines der beiden Nachbarelemente b und c, etwa b, von Null verschieden, also absolut genommen $\geqq a$, so kann man die ganze Zahl t so wählen, daſs in dem äquivalenten Systeme $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a, & b-ta\\ a', & b'-ta'\end{pmatrix}$ $\bar{b} = b - ta \geqq 0$ und kleiner als a ist. Ist $\bar{b}$ nicht Null, so kann man dieses Element an die erste Stelle bringen, also das Anfangselement weiter verkleinern, und dann in derselben Weise fortfahren. Da aber jedesmal a verkleinert wird, so muſs man nach einer endlichen Anzahl von Operationen zu einem äquivalenten Systeme $\begin{pmatrix}\bar{a}, & 0\\ 0, & \bar{d}\end{pmatrix}$ gelangen, in welchem beide Nachbarelemente $\bar{b}$ und $\bar{c}$ Null sind. Ist dann $\bar{a}$ noch nicht ein Teiler von $\bar{d}$, so kann das Anfangselement noch weiter dadurch verkleinert werden, daſs man in dem äquivalenten Systeme

$$\begin{pmatrix}\bar{a}, & \bar{d}\\ 0, & \bar{d}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}, & 0\\ 0, & \bar{d}\end{pmatrix}$$

das zweite Element wiederum successive auf Null reduziert. So gelangt man zuletzt zu einem äquivalenten Systeme $\begin{pmatrix}d_1, & 0\\ 0, & d_1 d_2\end{pmatrix}$, in welchem $d_1 > 0$ und ein Divisor des letzten Elementes ist, und damit zum Beweise unserer Behauptung.

Ist also $S = \begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ ein beliebiges ganzzahliges System, so kann man stets zwei unimodulare Systeme E und E' finden, für die

$$ESE' = \begin{pmatrix}d_1, & 0\\ 0, & d_1 d_2\end{pmatrix}$$

ist.

Geht man in dieser Gleichung zu den Determinanten über, so folgt

$$\Delta = ab' - a'b = d_1^2 d_2, \tag{6}$$

und aus dieser Gleichung bestimmt sich d_2, sobald d_1 gefunden ist.

Ich zeige nun leicht, daſs dieses reduzierte Diagonalsystem eindeutig bestimmt ist, indem ich beweise, daſs das erste Element d_1 der gröſste gemeinsame Teiler der vier Elemente (a, b, a', b'), also der Teiler der Form und als solcher eindeutig bestimmt ist; dann gilt ja dasselbe auch für $d_2 = \frac{\Delta}{d_1^2}$, und unsere Behauptung ist erwiesen.

Zu diesem Zwecke beweise ich den Satz:

Für zwei äquivalente Systeme $S = \begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ und $S_1 = \begin{pmatrix}a_1, & b_1\\ a_1', & b_1'\end{pmatrix}$ sind die Teiler t und t_1 ihrer Elemente einander gleich.

In der Tat, sind S und S_1 äquivalent, ist also $ESE' = S_1$ oder ausgeschrieben

$$(7) \qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \alpha', & \beta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma, & \delta\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1, & b_1\\ a_1', & b_1'\end{pmatrix},$$

wo die beiden Kompositionssysteme E und E' links unimodular sind, so braucht man nur zu zeigen, daſs t ein Divisor von t_1 ist; denn wegen der Symmetrie der über S und S_1 gemachten Voraussetzung folgt dann auch, daſs t_1 in t enthalten, daſs also beide Teiler identisch sind. Führt man aber in (7) die Komposition links aus, so sieht man, daſs die Elemente von S_1 homogene lineare Funktionen der Elemente von S mit ganzzahligen Koeffizienten sind; also sind alle vier Elemente (a_1, b_1, a_1', b_1') von S_1 durch den Teiler t von (a, b, a', b') teilbar; ihr gröſster gemeinsamer Teiler t_1 ist also wirklich ein Multiplum von t, was zu beweisen war.

In dem zu S äquivalenten reduzierten Systeme $\begin{pmatrix}d_1, & 0\\ 0, & d_1 d_2\end{pmatrix}$ ist aber der Teiler der Koeffizienten offenbar gleich d_1; also ist d_1 auch der gemeinsame Teiler von (a, b, a', b'), und damit ist bewiesen, daſs jenes reduzierte System eindeutig bestimmt ist. Also ergibt sich der Satz:

> Jedes ganzzahlige System, dessen Teiler d und dessen Determinante Δ ist, ist dem reduzierten Systeme $\begin{pmatrix}d, & 0\\ 0, & \frac{\Delta}{d}\end{pmatrix}$ äquivalent.

Auch hier ist es leicht, die Klassenanzahl der Systeme $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ von gegebener Determinante Δ zu bestimmen, wenn man wie vorher alle äquivalenten Systeme in eine und dieselbe Klasse rechnet. Nach der obigen Bemerkung ist nämlich wieder jedes System einem und auch nur einem reduzierten Systeme $\begin{pmatrix}d_1, & 0\\ 0, & d_1 d_2\end{pmatrix}$ äquivalent. Die Klassenanzahl stimmt also auch hier mit der Anzahl der reduzierten Systeme überein.

Da nun für ein reduziertes System $\Delta = d_1^2 d_2$ ist, so erhält man für eine gegebene Determinante Δ genau so viele verschiedene reduzierte Systeme, als es möglich ist, Δ in der Form $d_1^2 d_2$ darzustellen. Es sei

$$\Delta = P^2 Q,$$

wo P^2 das gröſste in Δ enthaltene Quadrat bezeichnet, Q also keine gleichen Faktoren mehr enthält und positiv oder negativ ist, je nachdem dasselbe für Δ gilt; dann kann offenbar eine Gleichung

$$\Delta = P^2 Q = d_1^2 d_2$$

nur bestehen, wenn d_1 ganz in P enthalten ist, denn aus ihr folgt

$$\left(\frac{P}{d_1}\right)^2 \cdot Q = d_2;$$

bliebe also auch nur eine Primzahl p im Nenner von $\frac{P}{d_1}$ übrig, ohne sich fortzuheben, so müßte ihr Quadrat in Q enthalten sein, was nicht möglich ist, weil Q keine gleichen Faktoren enthält. Demnach ist $\begin{pmatrix} d_1, & 0 \\ 0, & d_1 d_2 \end{pmatrix}$ dann und nur dann ein reduziertes System der Determinante Δ, wenn d_1 ein Teiler von P ist.

Die Klassenanzahl der Systeme $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ für eine gegebene Determinante $\Delta = P^2 Q$ ist hiernach genau gleich der Anzahl der Divisoren des quadratischen Faktors P von Δ.

Enthält also Δ überhaupt keine mehrfachen Faktoren, so existiert nur eine einzige Klasse, deren reduziertes System $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \Delta \end{pmatrix}$ ist.

Sechste Vorlesung.

Die Äquivalenz beliebiger Systeme. — Systeme von nicht verschwindender und von verschwindender Determinante. — Reduzierte Systeme. — Die bilinearen Formen von vier Variablen mit ganzzahligen und mit beliebigen Koeffizienten. — Äquivalente Formen. — Die kongruenten Transformationen. — Äquivalenz der quadratischen Formen. — Äquivalenzbedingungen für die kongruenten Transformationen. — Die *Hamilton*schen Quaternionen. — Die charakteristischen Eigenschaften der Determinante.

§ 1.

Viel einfacher sind die Resultate, wenn man die in der vorigen Vorlesung gegebenen Äquivalenzbestimmungen nicht auf ganzzahlige, sondern auf beliebige Systeme anwendet, wobei dann natürlich die zur Komposition verwandten unimodularen Systeme ebenfalls nicht mehr ganzzahlig zu sein brauchen.

Nennt man hier zunächst zwei Systeme $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{pmatrix}$ äquivalent, wenn das eine in das andere durch v o r d e r e Komposition mit einem unimodularen Systeme übergeführt werden kann, wenn also

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{pmatrix}$$

wird, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige Konstanten bedeuten und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist, so ist hierzu wiederum notwendig, daſs die Determinanten der Systeme gleich sind; während aber bei ganzzahligen Systemen hierzu noch die weiteren Bedingungen hinzukamen, daſs die ihnen entsprechenden reduzierten Systeme $\begin{pmatrix} d, & r \\ 0, & d' \end{pmatrix}$ einander gleich sind, erkennt man hier leicht, daſs für diese neue Äquivalenz die Gleichheit der Determinanten die notwendige und hinreichende Bedingung wird, falls $\Delta \gtrless 0$ ist.

In der Tat erkennt man unmittelbar, daſs jedes System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ mit nicht verschwindender Determinante Δ dem reduzierten Systeme

$\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ äquivalent ist, indem stets ein unimodulares System $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ so bestimmt werden kann, daſs die Gleichung

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Komponiert man nämlich diese Gleichung hinten mit dem reziproken Systeme $\begin{pmatrix}\frac{b'}{\Delta}, & -\frac{b}{\Delta}\\ -\frac{a'}{\Delta}, & \frac{a}{\Delta}\end{pmatrix}$, so erhält man für das gesuchte System $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ die Bestimmung

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{b'}{\Delta}, & -\frac{b}{\Delta}\\ -\frac{a'}{\Delta}, & \frac{a}{\Delta}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}b', & -b\\ -\frac{a'}{\Delta}, & \frac{a}{\Delta}\end{pmatrix},$$

und die Determinante dieses Systemes ist evident gleich eins. Genau dasselbe gilt natürlich auch für die hintere Komposition mit unimodularen Systemen und auch dann, wenn man vordere und hintere Komposition zuläſst.

Es ergibt sich also für den Fall einer nicht verschwindenden Determinante der Satz:

> Die Gleichheit der Determinanten zweier Systeme ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs sich jedes System in das andere umformen läſst, indem man es vorn oder hinten mit einem unimodularen Systeme komponiert. Jedes System ist in diesem Sinne dem reduzierten $\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ äquivalent.

Wegen dieser Eigenschaft der Determinante, für äquivalente Systeme denselben Wert zu haben, heiſst die Determinante mit der von *Sylvester* eingeführten Bezeichnung eine Invariante für die hier erklärte Äquivalenz, und zwar wird sie eine charakteristische Invariante für diese genannt, weil sie einzig und allein für äquivalente Systeme denselben Wert besitzt. Denkt man sich auch jetzt wieder alle äquivalenten Systeme in eine Klasse vereinigt, so ist jede Klasse eindeutig durch ihre reduzierte $\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$, oder also, was hier dasselbe ist, durch ihre Determinante bestimmt. Da somit jede andere Invariante der Klasse eine eindeutige Funktion der Determinante sein

müſste, so kann diese als einzige Invariante der Klasse betrachtet werden. Ist ihr Wert bestimmt (aber wie in dieser ganzen Untersuchung als eine von Null verschiedene Zahl), so können noch drei Elemente für die der Klasse angehörigen Systeme ganz willkürlich gewählt werden (mit Ausnahme spezieller Wertsysteme, welche die Determinante zum Verschwinden bringen würden). Jede Klasse mit nicht verschwindender Determinante umfaſst somit eine dreifache Mannigfaltigkeit von Systemen.

Bei dieser Entwickelung wurde vorausgesetzt, daſs die Determinante des betrachteten Systemes von Null verschieden sei. Nur dann existieren ja die reziproken Systeme, durch deren Benützung die Systeme ineinander transformiert wurden. Nimmt man dagegen $\Delta = 0$ an, so erhält man wieder verschiedene Äquivalenzbedingungen, je nachdem man nur vordere oder nur hintere oder endlich vordere und hintere Komposition zuläſst. Wir trennen daher diese Fälle wieder und fragen zunächst: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit ein System $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}'\end{pmatrix}$ aus einem anderen von verschwindender Determinante $\begin{pmatrix}a, & b \\ a', & b'\end{pmatrix}$ durch vordere Komposition mit einem unimodularen hervorgehe, d. h. damit die Gleichung bestehe

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b \\ a', & b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}'\end{pmatrix},$$

wo

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad ab' - a'b = 0$$

ist. Geht man in dieser Gleichung von den Systemen zu ihren Determinanten über, so ergibt sich zunächst als notwendige Bedingung für diese Äquivalenz die, daſs auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = 0$ ist, d. h. auch hier müssen beide Systeme gleiche Determinanten haben. Indessen reicht diese Bedingung hier nicht hin, wie die folgenden Betrachtungen lehren: Es werde zuerst angenommen, daſs nicht alle Elemente von $\begin{pmatrix}a, & b \\ a', & b'\end{pmatrix}$ gleich Null sind, daſs also dieses System den Rang eins hat; dann kann man stets voraussetzen, daſs mindestens ein Element der ersten Zeile (a, b), etwa a, von Null verschieden ist, da man dies sonst durch vordere Komposition mit dem Vertauschungssysteme $\begin{pmatrix}0, & -1 \\ 1, & 0\end{pmatrix}$ stets erreichen kann. Setzt man dann $\frac{a'}{a} = k$, so folgt aus der Gleichung $ab' - a'b = 0$ sofort

$$a' = ka, \quad b' = kb,$$

und auch hier kann man $k \gtrless 0$ voraussetzen, da man sonst vorher vorn mit einem beliebigen Systeme $\begin{pmatrix}1, & k\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ komponieren könnte.

Soll nun

$$\text{(I.)}\qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ ka, & kb\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}'\end{pmatrix}$$

sein, so müssen die Gleichungen bestehen

$$a(\alpha + k\beta) = \mathfrak{a}, \quad a(\gamma + k\delta) = \mathfrak{a}'$$
$$b(\alpha + k\beta) = \mathfrak{b}, \quad b(\gamma + k\delta) = \mathfrak{b}';$$

es muſs also notwendig

$$(1)\qquad \frac{b}{a} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \lambda$$

sein, d. h. für den Fall $\Delta = 0$ ist auch der Quotient $\frac{b}{a}$ eine Invariante für die Äquivalenz dieser Systeme.

Nun ist aber leicht zu zeigen, daſs in diesem Falle auch keine andere Invariante existiert. Wir beweisen nämlich, daſs jedes System $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$, falls $\frac{b}{a} = \lambda$ endlich ist, dem reduzierten $\begin{pmatrix}1, & \lambda\\ 0, & 0\end{pmatrix}$, dagegen für $\lambda = \infty$, also für $a = 0$, dem reduzierten Systeme $\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix}$ äquivalent ist. In der Tat folgt aus der Identität

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{a}, & 0\\ 0, & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ -\frac{a'}{a}, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & \frac{b}{a}\\ 0, & \Delta\end{pmatrix},$$

in welcher die beiden ersten Systeme links unimodular sind, in dem Falle

$$a \gtrless 0, \qquad \Delta = 0, \qquad \frac{b}{a} = \lambda$$

die Äquivalenz

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1, & \lambda\\ 0, & 0\end{pmatrix}.$$

Ist dagegen $a = 0$, also, da alsdann $b \gtrless 0$ vorausgesetzt werden kann, $\lambda = \frac{b}{a} = \infty$, so ergibt sich aus der analogen Identität

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{b}, & 0\\ 0, & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ -\frac{b'}{b}, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a}{b}, & 1\\ -\Delta, & 0\end{pmatrix}$$

wegen $\Delta = a = 0$ die Äquivalenz

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix};$$

jedes System vom Range eins ist also einem und nur einem reduzierten äquivalent.

Ist das System endlich vom Range Null, verschwinden also alle seine Elemente, so muſs offenbar ein anderes denselben Rang haben, damit es diesem äquivalent sei.

Ganz entsprechende Resultate ergeben sich natürlich bei der hinteren Komposition; nur ist in diesem Falle, sobald der Rang gleich eins ist, der Quotient $\mu = \frac{a'}{a}$ die zweite Invariante, und die zugehörigen reduzierten Systeme sind dann $\begin{pmatrix}1, & 0\\ \mu, & 0\end{pmatrix}$ oder (für $\mu = \infty$) $\begin{pmatrix}0, & 0\\ 1, & 0\end{pmatrix}$.

Sieht man endlich zwei Systeme als äquivalent an, wenn sie durch vordere und hintere Komposition mit Einheitssystemen ineinander übergeführt werden können, so besteht der einfache Satz:

Zwei Systeme sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleiche Determinante und gleichen Rang haben.

Dieser Satz ist nur noch für den Fall zu beweisen, wo $\Delta = 0$ und der Rang gleich eins ist. Alsdann kann aber jedes System durch vordere Komposition in $\begin{pmatrix}1, & \lambda\\ 0, & 0\end{pmatrix}$ oder in $\begin{pmatrix}0, & 1\\ 0, & 0\end{pmatrix}$ und dieses durch hintere Komposition mit den Einheitssystemen

$$\begin{pmatrix}1, & -\lambda\\ 0, & 1\end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$$

in das reduzierte System

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 0\end{pmatrix}$$

transformiert werden, und damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 2.

Die wichtigste Anwendung, welche die oben eingeführten Begriffe der Äquivalenz erfahren, ist die auf die Theorie der bilinearen Formen. Es sei wieder

$$(1) \qquad B(x,y\,|\,x',y') = \begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}(x,y\,|\,x',y') = (A)\,(x,y\,|\,x',y')$$
$$= axx' + a'xy' + byx' + b'yy'$$

eine beliebige Form mit den Variablenpaaren (x, y) und (x', y') und dem Koeffizientensysteme A; ersetzt man dann x, y und x', y' durch neue Variable $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$, vermittelst der Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned}(x, y) &= \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (S)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\\ (x', y') &= \begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}') = (T)(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'),\end{aligned}$$

so erhält man eine neue bilineare Form

$$(2a)\qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{x}',\mathfrak{y}') = \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}'\end{pmatrix}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{x}',\mathfrak{y}') = (\mathfrak{A})(\mathfrak{x},\mathfrak{y}\,|\,\mathfrak{x}',\mathfrak{y}')$$
$$= \mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{a}'\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{x}' + \mathfrak{b}'\mathfrak{y}\mathfrak{y}',$$

deren Koeffizientensystem $\mathfrak{A}$ aus dem ursprünglichen A dadurch hervorgeht, dafs man jenes hinten mit dem Substitutionssysteme S und vorn mit dem aus T transponierten $\overline{T}$ komponiert; d. h. es ist

$$(3)\qquad \mathfrak{A} = \overline{T} A S,$$

oder ausgeschrieben

$$(3a)\qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha', & \gamma'\\ \beta', & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}.$$

Durch Ausführung dieser Kompositionsgleichungen ergeben sich für die Koeffizienten der transformierten Form die Gleichungen

$$(3b)\qquad \begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \alpha\alpha' a + \alpha\gamma' a' + \gamma\alpha' b + \gamma\gamma' b'\\
\mathfrak{b} &= \beta\alpha' a + \beta\gamma' a' + \delta\alpha' b + \delta\gamma' b'\\
\mathfrak{a}' &= \alpha\beta' a + \alpha\delta' a' + \gamma\beta' b + \gamma\delta' b'\\
\mathfrak{b}' &= \beta\beta' a + \beta\delta' a' + \delta\beta' b + \delta\delta' b'.
\end{aligned}$$

Geht man in den Gleichungen (3) oder (3a) von den Systemen zu den Determinanten über, so erhält man

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha', & \gamma'\\ \beta', & \delta'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}.$$

Betrachtet man zunächst ganzzahlige Formen, so wird man zwei solche dann als äquivalent anzusehen haben, wenn die eine in die andere durch eine ganzzahlige Substitution übergeführt werden kann und umgekehrt, oder, was im wesentlichen dasselbe ist, wenn die eine in die andere durch ganzzahlige unimodulare Substitution übergeht. Da dasselbe dann auch von den Koeffizientensystemen $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}'\end{pmatrix}$ gilt, so fällt diese Äquivalenz ganzzahliger bilinearer Formen vollständig mit der auf S. 81 flg. behandelten Äquivalenz der Systeme zusammen, auf welche wir ja auch dort durch die Untersuchung der Formen geführt wurden.

Benützt man das dort abgeleitete Resultat hier für die Formen, so kann man sofort die folgenden Sätze aussprechen:

I. Jede ganzzahlige Form der nicht verschwindenden Determinante Δ ist einer und nur einer reduzierten Form

$$d_1(xy + d_2 x'y')$$

äquivalent, wo $\Delta = d_1^2 d_2$ ist.

II. Ist $\Delta = P^2 Q$, wo Q lauter einfache Teiler enthält, so ist die Anzahl der Klassen bilinearer Formen von der Determinante Δ gleich der Anzahl der Divisoren von P.

Gehen wir jetzt zu Formen mit beliebigen Koeffizienten über, so lehren die im § 1 gegebenen Äquivalenzbetrachtungen, daß falls $\Delta \gtrless 0$ ist, jede Form äquivalent ist der Hauptform

$$\Delta x x' + y y',$$

und zwar wird die Transformation in diese z. B. durch die Kompositionsgleichung

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b', & -\frac{b}{\Delta} \\ -a', & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

geliefert; hieraus geht hervor, daß jede Form in die Hauptform auch dadurch transformiert werden kann, daß man nur ein Paar der Variablen transformiert, das andere ungeändert läßt.

Dies letztere ist aber nicht mehr möglich, wenn $\Delta = 0$ ist. Transformiert man hier beide Variablenpaare, so kann man jedes System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ mit verschwindender Determinante auf die reduzierte Form $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$, also auch jede Form in die Form $B_0 = xx'$ transformieren. Dies ist aber nicht möglich, wenn man nur die vordere oder nur die hintere Komposition zuläßt. Läßt man nur vordere Komposition mit unimodularen Systemen zu, oder was dasselbe ist, transformiert man in der Form nur das zweite Variablenpaar (x', y'), so sind zwei Formen $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{pmatrix}$ von verschwindender Determinante dann und nur dann äquivalent, wenn $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{vmatrix} = 0$ und zugleich

$$\frac{b}{a} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = J,$$

also $b = aJ$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} J$ ist; und ebenso ist wegen des Verschwindens der Determinanten auch

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'} = J$$

oder $b' = a' J$ und $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}' J$. Die beiden äquivalenten Formen lassen sich also in diesem Falle folgendermaßen schreiben

$$x'(ax + by) + y'(a'x + b'y) = (ax' + a'y')(x + Jy)$$
$$\mathfrak{x}'(\mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y) + \mathfrak{y}'(\mathfrak{a}'x + \mathfrak{b}'y) = (\mathfrak{a}\mathfrak{x}' + \mathfrak{a}'\mathfrak{y}')(x + Jy).$$

Hier besitzen somit die zu allen äquivalenten Systemen gehörigen bilinearen Formen einen und denselben von x, y allein abhängigen linearen Teiler, der sich bei einer linearen Transformation der x', y' allein selbstverständlich nicht ändert. Schreiben wir die Form B wieder in der Form $\xi x' + \eta y'$, und führen wir den größten gemeinsamen Teiler der beiden Linearfaktoren ξ und η ein, mit denen x' und y' multipliziert sind, so ist derselbe gleich eins, wenn $\Delta \gtrless 0$ ist, aber gleich $x + Jy$, wenn Δ verschwindet. Wir können also die beiden für die Transformation der Variablen x', y' allein erhaltenen Resultate in den folgenden Satz zusammenfassen:

> Zwei bilineare Formen $B(x, y \mid x', y')$ und $\mathfrak{B}(x, y \mid \mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ sind dann und nur dann durch unimodulare Transformation der letzten Variablen ineinander überführbar, wenn sie erstens gleiche Determinanten haben und wenn zweitens ihre Divisoren für variable x', y' bezw. $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$ identisch sind.

Dabei ist der triviale Fall, daſs $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ vom Range Null ist, ausgeschlossen. Wir sehen aber, daſs der sogenannte allgemeine Fall einer nicht verschwindenden Determinante hier insofern als Spezialfall auftritt, weil dann die Form für unbestimmte x', y' den Teiler 1 hat.

Ganz anders gestalten sich die Resultate, wenn wir, statt die beiden unimodularen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$ für (x, y) und (x', y') willkürlich zu lassen, Beziehungen zwischen ihnen annehmen. Diese Beziehungen können sehr mannigfaltiger Natur sein; wir wollen hier nur die besonders betrachten, wo die Substitutionen für beide Variablensysteme einander gleich sind; d. h. wo

$$\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

ist.

Wir nennen jetzt also zwei bilineare Formen

(5) $axx' + a'xy' + byx' + b'yy'$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{a}'\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{x}' + \mathfrak{b}'\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$

äquivalent, wenn die erste in die zweite durch die Transformationen

$$(5\text{a}) \qquad (x', y') = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} (\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'), \quad (x, y) = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

übergeführt werden kann, deren Determinante gleich eins ist, wenn also zwischen den Koeffizientensystemen die Beziehung

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, & \gamma \\ \beta, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{pmatrix}$$

besteht. Man sagt dann, zwei solche bilineare Formen können „durch kongruente Substitutionen“ ineinander transformiert werden. Vor allem erkennt man ohne weiteres, daſs auch hier jene beiden Fundamentalsätze für die Äquivalenz bestehen, auf welche wir auf S. 72 hingewiesen hatten.

Der groſse Vorteil, den die Anwendung der kongruenten Substitutionen bei den bilinearen Formen darbietet, besteht darin: Setzt man in einer bilinearen Form die beiden Variablenpaare einander gleich, d. h. $x' = x$, $y' = y$, so erhält man eine neue Form

$$Q = ax^2 + (b + a')xy + b'y^2,$$

welche in den beiden Variablen (x, y) homogen von der zweiten Dimension ist. Eine solche Funktion wird eine quadratische Form genannt. Auch hier kann man zwei Formen Q und

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}^2 + (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}')\mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{b}'\mathfrak{y}^2$$

äquivalent nennen, wenn die eine durch eine unimodulare Transformation in die andere übergeht. Setzt man aber in den beiden Formen (5) die Variablenpaare einander gleich, so gehen sie über in Q und $\mathfrak{Q}$, und man erkennt, daſs die beiden quadratischen Formen stets äquivalent sein müssen, wenn die zugehörigen bilinearen Formen durch kongruente Transformationen ineinander übergehen sollen. Durch diese Transformationen werden also auch gleichzeitig die zu den bilinearen gehörigen quadratischen Formen ineinander transformiert.

Um nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für diese Äquivalenz aufzustellen, gehen wir zuerst in der Gleichung (6) zu den Determinanten über, und finden da zunächst die frühere Bedingung

$$\text{(6a)} \qquad \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{vmatrix}.$$

Indessen erkennt man leicht, daſs für den so verengerten Äquivalenzbegriff diese Gleichung nicht die einzige Bedingung ist. In der Tat haben wir für eine solche kongruente Transformation drei ganz willkürliche Konstanten zu unserer Verfügung, nämlich drei der Transformationskoeffizienten (weil der vierte wegen der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ durch jene drei eindeutig bestimmt ist). Diese drei Gröſsen haben den vier Gleichungen zu genügen, welche sich aus (6) ergeben, wenn man dort die Kompositionen links ausführt und das so erhaltene System dem rechtsstehenden gleichsetzt. Diesen vier Gleichungen sind aber nur drei von ihnen äquivalent, weil nach der Voraussetzung die Determinanten beider Systeme einander gleich sind. Obwohl wir somit nur drei

Gleichungen zur Bestimmung jener drei unabhängigen Gröſsen haben, ist ihre Auflösung im allgemeinen nicht möglich; es muſs in der Tat noch eine neue Beziehung zwischen beiden Systemen hinzukommen.

Um dies zu zeigen, vertauschen wir sowohl in den Formen (5), als auch in den Transformationsgleichungen (5a) die Variablenpaare (x, y) mit (x', y') und zugleich auch die entsprechenden $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$; dadurch erhalten wir zwar an Stelle von (5) zwei andere Formen, dagegen hat diese gleichzeitige Vertauschung auf die Transformationsgleichungen (5a) keinen Einfluſs. Da es auf die Bezeichnung der Variablen gar nicht ankommt, so finden wir, daſs von den so entstehenden beiden Formen

$$(7)\quad ax'x + a'x'y + by'x + b'y'y \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}\mathfrak{x}'\mathfrak{x} + \mathfrak{a}'\mathfrak{x}'\mathfrak{y} + \mathfrak{b}\mathfrak{y}'\mathfrak{x} + \mathfrak{b}'\mathfrak{y}'\mathfrak{y}$$

die erste in die zweite übergeht durch dieselben Transformationen

$$(x', y') = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} (\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'), \qquad (x, y) = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Jene beiden Formenpaare unterscheiden sich von den entsprechenden in (5) nur dadurch, daſs ihre Koeffizientensysteme die transponierten der früheren sind. Aus diesem Grunde nennt man sie die zu jenen **konjugierten Formen**. Man kann dieses Resultat also auch so aussprechen:

> Geht von zwei bilinearen Formen
>
> $$axx' + a'xy' + byx' + b'yy' \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{x}' + \mathfrak{a}'\mathfrak{x}\mathfrak{y}' + \mathfrak{b}\mathfrak{y}\mathfrak{x}' + \mathfrak{b}'\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$$
>
> die erste in die zweite durch eine kongruente Transformation über, so geht auch die erste der beiden konjugierten Formen durch dieselbe Transformation in die zweite über.

Multiplizieren wir nun die konjugierten Formen (5) und (7) mit Unbestimmten u und v und addieren sie, so erhalten wir zwei neue Formen

$$(8)\quad \begin{aligned} &a(u+v)x'x + (bu + a'v)x'y + (a'u + bv)y'x + b'(u+v)yy' \\ &\mathfrak{a}(u+v)\mathfrak{x}'\mathfrak{x} + (\mathfrak{b}u + \mathfrak{a}'v)\mathfrak{x}'\mathfrak{y} + (\mathfrak{a}'u + \mathfrak{b}v)\mathfrak{y}'\mathfrak{x} + \mathfrak{b}'(u+v)\mathfrak{y}\mathfrak{y}', \end{aligned}$$

welche offenbar ebenfalls und zwar für unbestimmte u, v durch die unimodularen Substitutionen (5a) ineinander übergehen. Hieraus folgt aber, daſs ihre Determinanten für unbestimmte (u, v) notwendig einander gleich sein müssen; man hat also

$$\begin{vmatrix} a(u+v), & bu + a'v \\ a'u + bv, & b'(u+v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}(u+v), & \mathfrak{b}u + \mathfrak{a}'v \\ \mathfrak{a}'u + \mathfrak{b}v, & \mathfrak{b}'(u+v) \end{vmatrix},$$

und diese Gleichung läfst sich nach leichter Umformung folgendermafsen schreiben

$$(9)\quad (ab' - a'b)(u+v)^2 - (a'-b)^2 uv = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b})(u+v)^2 - (\mathfrak{a}' - \mathfrak{b})^2 uv.$$

Da diese Gleichung für unbestimmte u, v, also auch für jeden Wert von $(u+v)^2$ und uv bestehen mufs, so ergeben sich als notwendige Bedingungen für diese Art der Äquivalenz bilinearer Formen die folgenden beiden Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} ab' - a'b &= \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} \\ (a' - b)^2 &= (\mathfrak{a}' - \mathfrak{b})^2, \end{aligned}$$

von denen wir die erste schon vorher abgeleitet hatten.

Nunmehr kann man leicht zeigen, dafs die als notwendig erkannten Bedingungen (10) auch hinreichend sind, wenigstens wenn man kongruente Transformationen mit der Determinante ± 1 zuläfst, d. h. dafs die beiden Gröfsen $ab' - a'b$ und $(a'-b)^2$, oder, was dasselbe ist, $|a' - b|$, ein System charakteristischer Invarianten für diese Äquivalenz bilden. Wir führen diesen Beweis auch hier dadurch, dafs wir zeigen, wie sich jede Form in eine äquivalente Reduzierte kongruent transformieren läfst, in der nur jene beiden Invarianten vorkommen; damit ist dann auch die Äquivalenz von zwei solchen Formen unmittelbar dargetan, da beide derselben reduzierten äquivalent sind.

Wenden wir nämlich auf die Form

$$ax'x + bx'y + a'y'x + b'y'y$$

die folgende kongruente Substitution mit der Determinante eins an

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\sqrt{a}} - \frac{a'+b}{2\sqrt{a}}\eta \\ y &= \sqrt{a}\,\eta \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{\xi'}{\sqrt{a}} - \frac{a'+b}{2\sqrt{a}}\eta' \\ y' &= \sqrt{a}\,\eta', \end{aligned}$$

wobei aber vorausgesetzt ist, dafs $a \gtrless 0$ ist, was stets durch eine vorgängige geeignete kongruente Transformation erreicht werden kann, so geht jene Form, wie eine leichte Rechnung lehrt, über in

$$(11)\qquad \xi\xi' + \left(\frac{a'-b}{2}\right)(\xi\eta' - \xi'\eta) - \left[\left(\frac{a'-b}{2}\right)^2 - (ab' - a'b)\right]\eta\eta'.$$

Die ursprüngliche Form ist demnach in eine solche transformiert, welche nur die Koeffizienten $a' - b$ und $ab' - a'b$ enthält. Alle Formen also, für welche diese beiden Invarianten gleich sind, für welche also

$$(12)\qquad \begin{aligned} ab' - a'b &= \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} \\ a' - b &= \mathfrak{a}' - \mathfrak{b} \end{aligned}$$

ist, gehören sicher in eine und dieselbe Klasse, weil sie sich durch kongruente unimodulare Substitutionen in die Form (11) und demnach auch ineinander transformieren lassen. Jedoch ist damit noch nicht der Beweis erbracht, daſs schon die Bedingungen (10) für die Äquivalenz der beiden Formen (5) notwendig und hinreichend sind. In der Tat ist dies auch nur der Fall, wenn man solche kongruente Transformationen zuläſst, deren Determinante nicht nur $+1$, sondern auch -1 ist. Sind nämlich die Bedingungen (10) erfüllt, ist also

$$a' - b = \varepsilon(\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}), \tag{13}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, und transformiert man jetzt die Variablen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ und $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ der zweiten Form durch die kongruenten Substitutionen mit der Determinante $\varepsilon = \pm 1$

$$\mathfrak{x} = \frac{\xi}{\sqrt{\mathfrak{a}}} - \frac{\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}}{2\varepsilon\sqrt{\mathfrak{a}}}\eta \qquad \mathfrak{x}' = \frac{\xi'}{\sqrt{\mathfrak{a}}} - \frac{\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}}{2\varepsilon\sqrt{\mathfrak{a}}}\eta'$$

$$\mathfrak{y} = \varepsilon\sqrt{\mathfrak{a}}\,\eta \qquad \mathfrak{y}' = \varepsilon\sqrt{\mathfrak{a}}\,\eta',$$

so geht die zweite Form, wie man sofort erkennt, in die reduzierte

$$\xi\xi' + \varepsilon\frac{\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}}{2}(\xi\eta' - \eta\xi') - \left[\left(\frac{\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}}{2}\right)^2 - (\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b})\right]\eta\eta', \tag{14}$$

d. h. nach (13) ebenfalls in die Form (11) über.

Da aber somit beide Formen (5) durch kongruente Transformationen mit den Determinanten 1 und ε in dieselbe reduzierte übergehen, so folgt leicht, daſs die eine in die andere durch eine kongruente Transformation mit der Determinante ε übergeht. Sind nämlich $A = \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$, $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{pmatrix}$ die Koeffizientensysteme jener beiden Formen, und sind E und E_1 die beiden soeben betrachteten Substitutionssysteme mit den Determinanten 1 und ε, durch welche dieselben beide in das reduzierte System übergehen, so ist ja

$$\overline{E}AE = \overline{E}_1\mathfrak{A}E_1,$$

und hieraus folgt durch vordere Komposition mit $\overline{E}_1^{-1}$ und hintere Komposition mit E_1^{-1}

$$\overline{E}_1^{-1}\overline{E}.A.EE_1^{-1} = \mathfrak{A},$$

oder wenn man $EE_1^{-1} = \mathfrak{C}$ setzt und beachtet, daſs dann $\overline{\mathfrak{C}} = \overline{E}_1^{-1}\overline{E}$ ist, so erhält man die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{C}}A\mathfrak{C} = \mathfrak{A};$$

und da $|\mathfrak{C}| = |E_1^{-1}|.|E| = \varepsilon$ ist, so ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 3.

Eine interessante Anwendung der Theorie der Komposition bildet die sogenannte Multiplikation der *Hamilton*schen Quaternionen. Um Vereinfachungen bei gewissen Rechnungen zu erzielen, hatte *Hamilton* eine Art neuer imaginärer Gröfsen in die Mathematik einzuführen gesucht. Wir gelangen zu diesen am einfachsten, wenn wir Systeme mit komplexen Elementen von der Form $a+bi$ betrachten, wo i wie gewöhnlich gleich $\sqrt{-1}$ ist. Wir wollen im folgenden nur Systeme von der folgenden Form betrachten

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} a+bi, & ci+d \\ ci-d, & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \gamma \\ -\bar{\gamma}, & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

wobei z. B. durch $\bar{\alpha}$ die zu α konjugierte komplexe Zahl bezeichnet wird; wir bezeichnen diese Systeme der Einfachheit wegen durch das Symbol

$$(a, b, c, d).$$

Die Determinante eines solchen Systemes ist

$$\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Komponiert man zwei solche Systeme (a, b, c, d), (a', b', c', d') miteinander in derselben Weise, wie vorher, so läfst sich, wie schon *Euler* erkannt hat, das Resultat wieder als ein ebensolches System schreiben

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a+bi, & ci+d \\ ci-d, & a-bi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'+b'i, & c'i+d' \\ c'i-d', & a'-b'i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+Bi, & Ci+D \\ Ci-D, & A-Bi \end{pmatrix},$$

dessen Elemente die folgenden bilinearen Funktionen von den Elementen des Systemes $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a', & b', & c', & d' \end{pmatrix}$ sind

$$(3)\qquad \begin{aligned} A &= aa' - bb' - cc' - dd', & C &= ac' + bd' + ca' - db' \\ B &= ab' + ba' - cd' + dc', & D &= ad' - bc' + cb' + da', \end{aligned}$$

wie man durch Ausführung der Komposition leicht erkennt. Jene Gleichung kann demnach bei unserer Bezeichnungsweise folgendermafsen geschrieben werden

$$(3a)\qquad (a, b, c, d)(a', b', c', d') = (A, B, C, D),$$

wo die Elemente des Kompositionsresultates durch (3) gegeben sind. Geht man nun in (2) von den Systemen zu ihren Determinanten über, so erhält man die merkwürdige Gleichung

$$(4)\qquad (a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = A^2+B^2+C^2+D^2.$$

Diese Identität zeigt z. B., wenn man alle Konstanten als ganze Zahlen ansieht, daſs das Produkt zweier Summen von je vier Quadraten sich stets wieder als Summe von vier Quadraten darstellen läſst. Hiernach braucht jener berühmte von *Fermat* herrührende Satz, daſs sich jede ganze Zahl als Summe von vier Quadraten darstellen läſst, nur für Primzahlen bewiesen zu werden; denn ist dieser Beweis einmal für alle Primzahlen erbracht, so gilt er nach (4) auch für das Produkt von zwei solchen Primfaktoren, also auch für alle zusammengesetzten Zahlen.

Die Gleichung (4) steht nun in einer merkwürdigen Beziehung zu einer sehr bekannten Identität aus der Theorie der komplexen Zahlen. Betrachtet man nämlich das Produkt zweier Zahlen $a + bi$ und $a' + b'i$, so läſst sich auch dieses wieder als komplexe Zahl schreiben; in der Tat ist ja

$$(5) \qquad (a + bi)(a' + b'i) = A + Bi,$$

wenn

$$(6) \qquad A = aa' - bb', \quad B = ab' + ba'$$

ist. Setzt man in (5) $-i$ an Stelle von i, so erhält man auf beiden Seiten die konjugierten Zahlen, und multipliziert man dann die beiden so entstehenden Gleichungen miteinander, so ergibt sich die Identität

$$(7) \qquad (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = A^2 + B^2,$$

mit deren Hilfe in der Arithmetik gezeigt wird, wie man das Produkt zweier Quadratsummen wieder als Quadratsumme darstellen kann.

Die naheliegende Analogie zwischen den Gleichungen (4) und (7) einerseits und (5) und (7) anderseits führte nun *Hamilton* dazu, eine Erweiterung dieser letzten Beziehung auf die Systeme (a, b, c, d) zu geben. Zu diesem Zwecke setzte er

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} a + bi, & ci + d \\ ci - d, & a - bi \end{pmatrix} = a + bi + cj - dk$$

und suchte die beiden neuen Elemente (j, k) so zu bestimmen, daſs für unbestimmte (a, b, c, d), (a', b', c', d') die Gleichung

$$(9) \quad (a + bi + cj - dk)(a' + b'i + c'j - d'k) = A + Bi + Cj - Dk$$

besteht, wo A, B, C, D die in (3) angegebenen Werte haben.

Führen wir die Multiplikation auf der linken Seite von (9) unter Beibehaltung der formalen Rechnungsregeln aus, jedoch ohne in dem Produkte je zweier Elemente i, j, k die Reihenfolge der Faktoren zu

vertauschen, und ordnen wir dann das Resultat nach den in A, B, C, D auftretenden Produkten, so wird dasselbe gleich

$$(aa' + bb'i^2 + cc'j^2 + dd'k^2) + (ab'i + ba'i - cd'jk - dc'kj)$$
$$+ (ac'j - bd'ik + ca'j - db'ki) - (ad'k - bc'ij - cb'ji + da'k).$$

Hieraus folgt, daſs jene Gleichung dann und nur dann bestehen kann, wenn die Elemente i, j, k den folgenden Gleichungen genügen

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = k, \ jk = i, \ ki = j, \\ ji = -ij, \ kj = -jk, \ ik = -ki. \end{aligned} \tag{10}$$

Ordnet man also die drei Elemente cyklisch in der Folge (i, j, k) an, so muſs das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden gleich dem dritten sein, während dasselbe Produkt in umgekehrter Folge dem negativen Werte des dritten gleich ist.

Unsere neuen Einheiten i, j, k befolgen also nicht mehr die gewöhnlichen Rechnungsregeln, wonach die Reihenfolge der Faktoren bei der Multiplikation gleichgültig ist; und dies ist auch gar nicht zu verwundern, weil wir es ja eigentlich gar nicht mit einer Multiplikation von Zahlgröſsen, sondern mit einer Komposition der Systeme zu tun haben, wo die Reihenfolge der Komposition eine wichtige Rolle spielt. In der Tat erhält man, indem man in (8) jedesmal den Koeffizienten von i, j, k bezw. gleich $1, 1, -1$ und alle anderen gleich Null setzt, für i, j, k die Gleichungen

$$i = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0, & i \\ i, & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix};$$

die in (8) rechts stehenden Elemente i, j, k sind also in Wahrheit Systeme mit komplexen Koeffizienten, und zwischen diesen bestehen wirklich die hier gefundenen Gleichungen (10), wenn das Einheitssystem durch 1, das negative Einheitssystem $\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$ durch -1 bezeichnet wird.

Besonders werde noch der interessante Spezialfall hervorgehoben

$$a' = a, \quad b' = -b, \quad c' = -c, \quad d' = -d.$$

Dann sind $B = C = D = 0$, während $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ wird. Es ist also

$$(a + bi + cj - dk)(a - bi - cj + dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2; \tag{11}$$

diese Relation, welche man aus der Kompositionsgleichung

$$\begin{pmatrix} a + bi, & ci + d \\ ci - d, & a - bi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - bi, & -ci - d \\ -ci + d, & a + bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2, & 0 \\ 0, & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

leicht direkt erschließen kann, bildet das Analogon zu der bekannten Gleichung

$$(11a)\qquad (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

§ 4.

Die charakteristischen Eigenschaften der Determinante eines Systemes von vier Elementen können auf verschiedenen Wegen gefunden werden. Das Nächstliegende ist, daſs man jene Eigenschaften aus der Natur der Lösungen zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten herleitet, da man durch diese ja überhaupt zuerst auf die Determinanten geführt wird. Hat man aber auf diesem oder einem anderen Wege einmal jene Eigenschaften gefunden, so kann man dann auch umgekehrt nach Funktionen $J\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ der Elemente eines Systemes fragen, welche jene vorgeschriebenen Eigenschaften besitzen, und untersuchen, welche Bedingungen die Determinante selbst vollständig bestimmen, d. h. welches System von Eigenschaften für die Determinante charakteristisch ist.

Auf solche Bedingungen werden wir von selbst durch die vorher durchgeführten Untersuchungen über die Äquivalenz von Systemen und ihre Invarianten hingeführt. So wurde z. B. schon früher gezeigt, daſs eine Funktion der vier Gröſsen eines komponierten Systemes $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, welche für die Reihenfolge der Komposition eine Invariante ist, notwendig eine Funktion der Determinante jener vier Gröſsen sein muſs. Soll aber jene Funktion die Determinante selbst werden, so müssen noch weitere Forderungen hinzugefügt werden, und diese sind nunmehr aufzusuchen.

Ähnlich kann man zu charakteristischen Bedingungen für die Determinante gelangen, wenn man beachtet, daſs dieselbe die einzige Invariante des Systemes für die vordere oder für die hintere Komposition mit unimodularen Systemen ist. Wir zeigten nun, daſs jedes System, also auch ein unimodulares, als Kompositionsresultat aus einer Reihe von Systemen

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}p, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann, von denen die beiden ersten selbst unimodular sind; wir brauchen daher nur zu bestimmen, wie sich $J\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ bei vorderer Komposition mit jedem dieser drei Elementarsysteme ändert,

um seine Änderung bei der Komposition mit jedem beliebigen Systeme zu erhalten. Da die beiden ersten Systeme unimodular sind, so werden wir voraussetzen müssen, daſs J bei der Komposition mit diesen ungeändert bleibt. Wir suchen daher zunächst eine Funktion $J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ der vier Elemente eines Systemes, welche ihren Wert nicht ändert, wenn das System vorn mit einem dieser beiden Elementarsysteme komponiert wird, für welche also die beiden Gleichungen bestehen

$$J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} -a', & -b' \\ a, & b \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} a+a', & b+b' \\ a', & b' \end{pmatrix}; \tag{2}$$

diese beiden Bedingungen muſs jene Funktion notwendig erfüllen, wenn sie die Determinante sein soll.

Die Komposition mit dem dritten Elementarsysteme $\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ wird jene Funktion aber verändern, weil seine Determinante ja nicht Eins ist. Wir wollen die dritte Bedingung stellen, daſs für diese Komposition

$$J\left(\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}\right) = J\begin{pmatrix} pa, & pb \\ a', & b' \end{pmatrix} = \Theta(p) J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} \tag{3}$$

sein soll, wo $\Theta(p)$ eine analytische Funktion von p sein soll. Eine Eigenschaft dieser Funktion können wir sofort angeben. Aus der Identität

$$\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pq, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

folgt nämlich

$$J\left(\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}\right) = \Theta(p)\Theta(q) J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = J\left(\begin{pmatrix} pq, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}\right)$$
$$= \Theta(pq) J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix};$$

also muſs jene analytische Funktion notwendig so beschaffen sein, daſs

$$\Theta(p)\,\Theta(q) = \Theta(p\,q) \tag{3a}$$

ist. Ferner muſs

$$\Theta(1) = 1 \tag{3b}$$

sein, da das System $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ durch Komposition mit $\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ für $p = 1$ keine Änderung erleidet.

Den beiden Bedingungen (3a) und (3b) genügt die Funktion $\Theta(p) = p^\alpha$, wenn α ein beliebig aber fest gegebener Exponent ist. Gleich-

zeitig erwähne ich, dafs, wie in der Funktionentheorie gezeigt wird*), die Funktion p^α die allgemeinste ist, welcher diese beiden Eigenschaften zukommen. Wir können und wollen daher $\Theta(p)$ durch p^α ersetzen.

Nun fanden wir auf S. 52 für jedes System mit von Null verschiedener Determinante folgende Dekomposition

$$(4)\quad \begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \alpha \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \gamma \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

wo α, β, γ bestimmte und für $a' \gtrless 0$ endliche Zahlen sind; ist $a' = 0$, so war bei dieser Darstellung eine unwesentliche Veränderung anzubringen. Beachtet man nun, dafs jedes der Systeme $\begin{pmatrix} 1, & t \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ in das Produkt $\begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ zerlegt werden kann und setzt den dann aus (4) sich ergebenden Ausdruck für $\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ in J ein, so folgt aus der Voraussetzung des Bestehens der Gleichungen (1), (2), (3) für die gesuchte Funktion $J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ die folgende Darstellung

$$(4\text{a})\quad J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \Theta(\Delta)\,\Theta(\alpha)\,\Theta\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Theta(\beta)\,\Theta\left(\frac{1}{\beta}\right)\Theta(\gamma)\,\Theta\left(\frac{1}{\gamma}\right) J\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

und mit Berücksichtigung der Eigenschaft (3a) der Funktion Θ erhält man schliefslich

$$(4\text{b})\quad J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \Theta(\Delta)\, J\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \Delta^\alpha . J\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Den konstanten Faktor $J\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$, welcher notwendig von Null verschieden sein mufs, wenn die Funktion J nicht identisch Null sein soll, wollen wir gleich Eins annehmen, also

$$(4\text{c})\quad J(E) = J\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = 1$$

setzen. Wählen wir endlich noch den Exponenten α in (4a) gleich Eins, so ergibt sich

$$J\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \Delta = ab' - a'b.$$

Wir haben also das Resultat:

*) Vergl. z. B. *Biermann*, Theorie der analytischen Funktionen, S. 289 flg.

Die einzige Funktion von vier Elementen $J\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$, für welche

(I)

$$(5)\quad J\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}-a', & -b'\\ a, & b\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}a+a', & b+b'\\ a', & b'\end{pmatrix}=\frac{1}{p}J\begin{pmatrix}pa, & pb\\ a', & b'\end{pmatrix}$$

und außerdem $J\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}=1$ ist, ist die Determinante des Systemes. Durch die drei Gleichungen (5) allein ist also die Determinante bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt.

Offenbar wären wir auf demselben Wege ebenfalls zur Determinante gelangt, wenn wir die gleichen Bestimmungen für die hintere Komposition mit Elementarsystemen getroffen hätten. Den entsprechenden Satz können wir folgendermaßen aussprechen:

(II)

Eine Funktion $\mathfrak{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$, für welche

$$\mathfrak{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=\mathfrak{J}\begin{pmatrix}b, & -a\\ b', & -a'\end{pmatrix}=\mathfrak{J}\begin{pmatrix}a, & a+b\\ a', & a'+b'\end{pmatrix}=\frac{1}{p}\mathfrak{J}\begin{pmatrix}pa, & b\\ pa', & b'\end{pmatrix}$$

und außerdem

$$\mathfrak{J}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}=1$$

ist, ist notwendig mit der Determinante identisch.

Jedes dieser beiden Resultate kann man zu einem einfachen neuen Beweise des Multiplikationstheoremes benutzen. Es ist die Funktion $J\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=ab'-a'b$ durch die Bedingungen (5) eindeutig bestimmt. Suchen wir nun ihren Wert für ein komponiertes System

$$\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\lambda+b\lambda', & a\mu+b\mu'\\ a'\lambda+b'\lambda', & a'\mu+b'\mu'\end{pmatrix}.$$

Wir wollen den Wert von J für dieses Kompositionssystem, als Funktion von $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ allein betrachtet, gleich $\bar{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ setzen, und die Eigenschaften von

$$\bar{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}a\lambda+b\lambda', & a\mu+b\mu'\\ a'\lambda+b'\lambda', & a'\mu+b'\mu'\end{pmatrix}$$

aufsuchen. Dann ist nach (5) offenbar

$$\bar{J}\begin{pmatrix}-a', & -b'\\ a, & b\end{pmatrix}=J\left\{\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix}\right\}=\bar{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix};$$

und ebenso findet man für $\bar{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ die übrigen charakteristischen Gleichungen (5), so daſs man erhält

$$\bar{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} = \bar{J}\begin{pmatrix}-a', & -b'\\ a, & b\end{pmatrix} = \bar{J}\begin{pmatrix}a+a', & b+b'\\ a, & b\end{pmatrix} = \frac{1}{p}\bar{J}\begin{pmatrix}pa, & pb\\ a', & b'\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich nach dem oben ausgesprochenen Satze (I)

$$\begin{aligned}\bar{J}\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} &= \Delta\bar{J}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} = \Delta J\left(\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix}\right)\\ &= \Delta J\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{pmatrix} = \Delta\,\Delta',\end{aligned}$$

wenn $\lambda\mu' - \lambda'\mu = \Delta'$ gesetzt wird, und damit ist der Multiplikationssatz bewiesen.

Siebente Vorlesung.

Determinanten und Systeme von neun Elementen. — Auflösung von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten. — Darstellung ihrer Lösung durch Determinantenquotienten. — Die Grundeigenschaften der Determinanten dritter Ordnung.

§ 1.

Wir gehen nun zur Untersuchung eines Systemes von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten über; hierdurch werden wir dann von selbst auf die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten von neun Elementen hingeführt werden.

Es seien also die drei Gleichungen gegeben

$$
\begin{aligned}
f \;&= a\,x + b\,y + c\,z + d \;= 0\\
f' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0\\
f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

wo die zwölf Koeffizienten wiederum völlig unbestimmte Gröfsen sind, und wir stellen uns die Aufgabe, aus ihnen die Unbekannten x, y, z zu bestimmen.

Die gewöhnliche Auflösungsmethode besteht nun darin, dafs man aus je zwei von diesen Gleichungen eine Unbekannte, etwa z, eliminiert; dadurch erhält man zwei lineare Gleichungen für x und y allein, deren Auflösung wir dann direkt hinzuschreiben imstande sind. Zu diesem Zwecke bilden wir aus den linken Seiten von (1) die beiden folgenden Funktionen

$$fc' - f'c \qquad \text{und} \qquad fc'' - f''c,$$

in denen die Koeffizienten von z offenbar gleich Null sind. Diese neuen Gleichungen können folgendermafsen geschrieben werden

$$
\begin{aligned}
fc' - f'c &= \begin{vmatrix} a, & a' \\ c, & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b, & b' \\ c, & c' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} d, & d' \\ c, & c' \end{vmatrix} = A'x + B'y + D' = 0\\
fc'' - f''c &= \begin{vmatrix} a, & a'' \\ c, & c'' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b, & b'' \\ c, & c'' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} d, & d'' \\ c, & c'' \end{vmatrix} = A''x + B''y + D'' = 0;
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ihre Koeffizienten

$$\text{(2a)} \qquad \begin{pmatrix} A', & B', & D' \\ A'', & B'', & D'' \end{pmatrix}$$

sind also leicht zu bildende Determinanten zweiter Ordnung aus den ursprünglichen Gleichungskoeffizienten.

Löst man nun diese beiden Gleichungen nach x und y auf, so ergibt sich nach dem Satze (7b) auf S. 16

$$\text{(3)} \qquad x:y:1 = \begin{vmatrix} B', & D' \\ B'', & D'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} D', & A' \\ D'', & A'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A', & B' \\ A'', & B'' \end{vmatrix},$$

oder also

$$\text{(3a)} \qquad x = \frac{|B', D'|}{|A', B'|}, \quad y = \frac{|D', A'|}{|A', B'|}.$$

Auf ähnliche Weise könnte man etwa durch Elimination von x eine entsprechende Proportion für $y:z:1$ erhalten und aus ihr z finden, oder auch diese letzte Unbekannte mit Hilfe einer der ursprünglichen Gleichungen berechnen.

Die Gleichungen (3a) lehren uns nun, daſs sich auch hier x und y als Quotienten von je zwei ganzen ganzzahligen Funktionen darstellen lassen, deren Zähler und Nenner diejenigen Determinanten zweiter Ordnung sind, welche sich aus dem Koeffizientensysteme (2a) bilden lassen, und welche in Bezug auf die Koeffizienten der ursprünglichen Gleichungen von der vierten Dimension sind.

Es ist unnötig, diese Funktionen wirklich auszurechnen, da wir die gesuchten Werte der Unbekannten sofort auf einem viel naturgemäſseren und übersichtlicheren Wege finden werden. Der hier betretene Weg ist nämlich deshalb für die Erkenntnis der Form und der Eigenschaften jener Funktionen sehr wenig geeignet, weil alle drei Determinanten in der Proportion (3) infolge der Unvollkommenheit und Unsymmetrie der angewandten Methode mit einem und demselben überflüssigen Faktor behaftet sind, welcher sich von selbst forthebt. Wir erhalten also auf diesem Wege nicht die Werte der Unbekannten in ihrer reduzierten Form, sondern müssen zu dieser erst durch Wegheben der gemeinsamen Faktoren zu gelangen suchen.

Durch die Auswertung jener drei Determinanten würde man sich direkt überzeugen können, daſs die drei Determinanten $|B', D'|$, $|D', A'|$ und $|A', B'|$ in der Tat sämtlich den Faktor c enthalten. Leichter gelangt man zu diesem Ziele durch den Nachweis, daſs jene Determinanten für $c = 0$ sämtlich verschwinden. Dies folgt unmittelbar daraus, daſs sich für $c = 0$ die beiden Gleichungen (2) auf $fc' = 0$ und $fc'' = 0$ reduzieren, d. h. daſs sie sich alsdann nur durch den konstanten

Faktor $\frac{c'}{c''}$ unterscheiden. Ist das aber der Fall, so mufs nach dem auf S. 20 bewiesenen Satze ihr Koeffizientensystem (2a) vom Range Eins sein, d. h. die drei aus ihm gebildeten Determinanten $|B', D'|$, $|D', A'|$, $|A', B'|$ müssen für $c = 0$ notwendig verschwinden; und hierdurch ist jener Beweis erbracht.

Aus der soeben gegebenen Darlegung folgt nun sofort, dafs bei dieser Art der Auflösung die Ausdrücke für die Zähler und Nenner der Unbekannten stets einen solchen überflüssigen gemeinsamen Teiler enthalten müssen. Abgesehen also von der Unsymmetrie dieses Verfahrens, welches in der Bevorzugung einer Unbekannten vor den beiden anderen liegt, liefert dasselbe niemals die reduzierten Ausdrücke für die Zähler und Nenner der Unbekannten und kann deshalb für unseren Zweck, die Erforschung der Eigenschaften jener einfachsten Ausdrücke nicht als geeignet angesehen werden.

§ 2.

Ein Verfahren, welches von den soeben hervorgehobenen Mängeln völlig frei ist, finden wir, wenn wir, ähnlich wie im § 1 der zweiten Vorlesung unsere Aufgabe folgendermafsen aussprechen:

> Welche Beschränkung wird der Veränderlichkeit der drei Variablen x, y, z durch die Forderung auferlegt, dafs die drei linearen Funktionen derselben
>
> $$\begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z + d \\ f' &= a'x + b'y + c'z + d' \\ f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' \end{aligned} \tag{1}$$
>
> den Wert Null haben sollen?

Auch hier wollen wir versuchen, das System (f, f', f'') durch ein anderes (F, F', F'') zu ersetzen, durch welches die Variabilität von (x, y, z) in gleicher Weise beschränkt wird, und welches im Gegensatze zu dem ersten von möglichst einfacher Form ist.

Bildet man die drei homogenen linearen Funktionen von (f, f', f'')

$$\begin{aligned} F &= pf + p'f' + p''f'' \\ F' &= qf + q'f' + q''f'' \\ F'' &= rf + r'f' + r''f'', \end{aligned} \tag{2}$$

wo die neuen Substitutionskoeffizienten

$$(2a)\qquad \begin{matrix} p, p', p'' \\ q, q', q'' \\ r, r', r'' \end{matrix}$$

ganz beliebige Konstanten sind, so wird offenbar jedes Wertsystem (x, y, z), welches die Funktionen (f, f', f'') zum Verschwinden bringt, auch (F, F', F'') zu Null machen. Man kann also sagen, daſs der durch $(f = 0,\ f' = 0,\ f'' = 0)$ bestimmte Bereich der drei Variablen x, y, z sicher ein Teil des durch das abgeleitete Gleichungssystem $(F = 0,\ F' = 0,\ F'' = 0)$ bestimmten ist. Hingegen würde in jedem einzelnen Falle noch der Nachweis zu führen sein, daſs auch umgekehrt jede Lösung des abgeleiteten Gleichungssystemes $(F = 0,\ F' = 0,\ F'' = 0)$ auch das ursprüngliche $(f = 0,\ f' = 0,\ f'' = 0)$ befriedigt. Erst dann kann man sagen, daſs beide Systeme die Variabilität von (x, y, z) in gleicher Weise beschränken, d. h. daſs in diesem Sinne die beiden Systeme (f, f', f'') und (F, F', F'') äquivalent sind. Dieser Beweis wird in dem hier zu betrachtenden Falle sehr leicht zu führen sein.

Wir wollen nun die bis jetzt ganz willkürlich angenommenen neun Substitutionskoeffizienten (2a) so zu bestimmen suchen, daſs das abgeleitete System (F, F', F'') von möglichst einfacher Gestalt wird, daſs nämlich F nur die eine Variable x, F' nur y und F'' nur z enthält. Ein solches System linearer Funktionen wollen wir auch hier ein reduziertes nennen. Kann man das ursprüngliche System durch ein äquivalentes reduziertes ersetzen, so findet man die zugehörigen Werte von x, y, z unmittelbar durch die Auflösung von diesen drei Gleichungen mit je einer Unbekannten.

Damit nun die erste abgeleitete Funktion F nur x enthalte, müssen die drei Konstanten (p, p', p'') so bestimmt werden, daſs die Ausdrücke

$$pb + p'b' + p''b'' \quad \text{und} \quad pc + p'c' + p''c''$$

verschwinden, welche in F die Koeffizienten von y und z sind; und ganz entsprechende Bedingungen für (q, q', q'') und (r, r', r'') erhält man aus der Forderung, daſs F' und F'' bezw. nur y und nur z enthalten sollen.

Es ergeben sich also für die Substitutionskoeffizienten (2a) die folgenden drei Systeme von je zwei Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{matrix} pb + p'b' + p''b'' = 0, & qc + q'c' + q''c'' = 0, & ra + r'a' + r''a'' = 0 \\ pc + p'c' + p''c'' = 0, & qa + q'a' + q''a'' = 0, & rb + r'b' + r''b'' = 0. \end{matrix}$$

Diesen Gleichungen wird nach S. 23 (5) identisch genügt, wenn wir für die neun Substitutionskoeffizienten die folgenden Werte setzen

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
p &= \begin{vmatrix} b', & b'' \\ c', & c'' \end{vmatrix}, & p' &= \begin{vmatrix} b'', & b \\ c'', & c \end{vmatrix}, & p'' &= \begin{vmatrix} b, & b' \\ c, & c' \end{vmatrix} \\
q &= \begin{vmatrix} c', & c'' \\ a', & a'' \end{vmatrix}, & q' &= \begin{vmatrix} c'', & c \\ a'', & a \end{vmatrix}, & q'' &= \begin{vmatrix} c, & c' \\ a, & a' \end{vmatrix} \\
r &= \begin{vmatrix} a', & a'' \\ b', & b'' \end{vmatrix}, & r' &= \begin{vmatrix} a'', & a \\ b'', & b \end{vmatrix}, & r'' &= \begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Man erkennt sofort, daſs in diesem Systeme die Elemente einer Zeile durch cyklische Vertauschung der oberen Indizes, dagegen die Elemente einer Kolonne durch cyklische Permutation der Buchstaben a, b, c auseinander hervorgehen.

Gibt man den Koeffizienten p, p', p'' die in (4) gefundenen Werte, so geht die abgeleitete Gleichung $F = 0$ über in

$$F = (ap + a'p' + a''p'')x + (dp + d'p' + d''p'') = 0,$$

und entsprechende Gleichungen erhält man für F' und F''. Aus ihnen ergeben sich für die Unbekannten x, y, z die Werte

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
x &= -\frac{dp + d'p' + d''p''}{ap + a'p' + a''p''} = -\frac{d\,|b', b''| + d'\,|b'', b| + d''\,|b, b'|}{a\,|b', b''| + a'\,|b'', b| + a''\,|b, b'|} \\
y &= -\frac{dq + d'q' + d''q''}{bq + b'q' + b''q''} = -\frac{d\,|c', c''| + d'\,|c'', c| + d''\,|c, c'|}{b\,|c', c''| + b'\,|c'', c| + b''\,|c, c'|} \\
z &= -\frac{dr + d'r' + d''r''}{cr + c'r' + c''r''} = -\frac{d\,|a', a''| + d'\,|a'', a| + d''\,|a, a'|}{c\,|a', a''| + c'\,|a'', a| + c''\,|a, a'|}.
\end{aligned}
$$

Was zunächst die Nenner jener drei Brüche anbetrifft, so erkennt man ohne weiteres, daſs sie drei ganze Funktionen von den neun Koeffizienten

$$
(6)\qquad
\begin{Bmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{Bmatrix}
$$

allein, d. h. von d, d', d'' unabhängig sind, und daſs der zweite und dritte aus dem ersten hervorgeht, indem man die Buchstaben (a, b, c) cyklisch permutiert. Bezeichnet man also den ersten Nenner mit $\Theta(a, b, c)$, wo zur Abkürzung nur die erste Zeile des Koeffizientensystemes (6) hingeschrieben ist, so können jene drei Nenner folgendermaſsen geschrieben werden

$$\Theta(a, b, c), \quad \Theta(b, c, a), \quad \Theta(c, a, b).$$

Der Zähler von x unterscheidet sich von seinem Nenner nur dadurch, daſs (a, a', a'') durch (d, d', d'') ersetzt ist, und das Ent-

sprechende gilt von den beiden Zählern von y und z. Bei derselben Bezeichnungsweise können diese also in der Form

$$\Theta(d, b, c), \quad \Theta(d, c, a), \quad \Theta(d, a, b)$$

geschrieben werden.

Die vollständige literale Auflösung der drei Gleichungen

$$F = 0, \quad F' = 0, \quad F'' = 0$$

ist also die folgende

$$x = -\frac{\Theta(d, b, c)}{\Theta(a, b, c)}, \quad y = -\frac{\Theta(d, c, a)}{\Theta(b, c, a)}, \quad z = -\frac{\Theta(d, a, b)}{\Theta(c, a, b)},$$

wo unter $\Theta(a, b, c)$ die folgende homogene Funktion der dritten Dimension von den neun Elementen (6) verstanden ist

$$(7) \qquad \begin{aligned} \Theta(a, b, c) &= a\begin{vmatrix} b', b'' \\ c', c'' \end{vmatrix} + a'\begin{vmatrix} b'', b \\ c'', c \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b, b' \\ c, c' \end{vmatrix} \\ &= a(b'c'' - c'b'') + a'(b''c - c''b) + a''(bc' - cb') \\ &= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c. \end{aligned}$$

Alle drei Unbekannte sind also Quotienten je zweier homogenen Funktionen der dritten Dimension, jedoch sind Zähler und Nenner immer dieselben Funktionen Θ, aber von verschiedenen Elementen.

Die in (7) aufgestellte Funktion Θ der neun Elemente $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$, welche uns so durch die Auflösung eines Gleichungssystemes geliefert wird, wollen wir hier die Determinante jenes Koeffizientensystemes nennen und sie durch

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix},$$

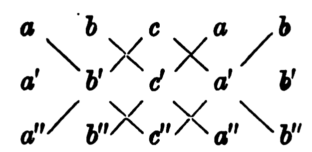
oder, wo keine Verwechselung zu befürchten ist, auch durch

$$| a, b, c |$$

bezeichnen. Da sie aus drei Zeilen und Kolonnen besteht, so wird sie eine Determinante der dritten Ordnung genannt.

§ 3.

Die im vorigen Abschnitte als Determinante bezeichnete Funktion kann in sehr einfacher Weise aus ihrem Koeffizientensysteme gebildet werden. Zu diesem Zwecke schreibe man hinter die dritte Vertikalreihe desselben noch einmal die erste und zweite und multipliziere in dem so entstehenden Systeme



jedesmal die in einer Diagonale stehenden Elemente miteinander. Dadurch erhält man zwei Systeme von je drei Produkten

$$(ab'c'', bc'a'', ca'b'') \quad \text{und} \quad (a''b'c, b''c'a, c''a'b),$$

welche den beiden Richtungen der Diagonalen entsprechen. Aus dem Ausdruck (7) für die Determinante ergibt sich dann, dafs man die Determinante erhält, wenn man von der Summe der drei ersten Produkte die Summe der letzten abzieht. Doch mufs gleich darauf hingewiesen werden, dafs diese Methode der Auswertung auf die Determinanten der dritten Ordnung beschränkt ist.

Die Determinante ist, wie man aus ihrem Ausdruck in (7) des vorigen Abschnittes erkennt, eine ganze Funktion ihrer neun Argumente von der dritten Dimension, welche in Bezug auf die Elemente einer jeden Zeile und auch einer jeden Kolonne homogen und linear ist. Ordnet man dieselbe nämlich einmal nach den Elementen (a, b, c) der ersten Zeile, das andere Mal nach denjenigen (a, a', a'') der ersten Kolonne, so erhält man die beiden Darstellungen

$$(1) \qquad |a, b, c| = a\begin{vmatrix} b', & c' \\ b'', & c'' \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c', & a' \\ c'', & a'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a', & b' \\ a'', & b'' \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} b', & c' \\ b'', & c'' \end{vmatrix} + a'\begin{vmatrix} b'', & c'' \\ b, & c \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{vmatrix},$$

und entsprechende Darstellungen würde man für die Entwickelung derselben nach einer der vier anderen Reihen erhalten.

Diese Darstellungen kann man nun benützen, um sofort einige wichtige Eigenschaften der Determinante abzuleiten, und mit ihrer Hilfe die im vorigen Abschnitte gefundene Lösung

$$(2) \qquad x = -\frac{|d, b, c|}{|a, b, c|}, \quad y = -\frac{|d, c, a|}{|b, c, a|}, \quad z = -\frac{|d, a, b|}{|c, a, b|}$$

des abgeleiteten Gleichungssystemes $(F = 0,\ F' = 0,\ F'' = 0)$ wesentlich zu vereinfachen.

Zunächst zeigt man, dafs die drei Nenner von (x, y, z) miteinander identisch sind; denn aus der ersten Darstellung der Determinante in (1) geht hervor, dafs sie unverändert bleibt, wenn man die Buchstaben (a, b, c) cyklisch permutiert, weil dadurch nur ihre drei Summanden miteinander vertauscht werden; es ist also

$$|a, b, c| = |b, c, a| = |c, a, b|.$$

Ebenso folgt, was hier beiläufig bemerkt werden mag, aus der zweiten Darstellung der Determinante ihre Unveränderlichkeit bei einer cyklischen Permutation der drei oberen Indizes. Vertauscht man auch in den Zählerdeterminanten die Buchstaben entsprechend, so kann man die Werte von (x, y, z) auch folgendermaßen schreiben

$$(2a) \qquad x = -\frac{|d, b, c|}{|a, b, c|}, \quad y = -\frac{|a, d, c|}{|a, b, c|}, \quad z = -\frac{|a, b, d|}{|a, b, c|}.$$

Vertauscht man die entsprechenden Elemente zweier Vertikalreihen oder zweier Horizontalreihen miteinander, so ändert die Determinante nur ihr Vorzeichen, nicht aber ihren absoluten Wert. Für die Vertauschung der beiden letzten Vertikalreihen, d. h. für die Permutation der Elemente (b, b', b'') mit (c, c', c'') erhellt dies sofort aus der zweiten Darstellung in (1), weil alsdann alle drei dort auftretenden Determinanten zweiter Ordnung nur ihr Vorzeichen ändern, und das gleiche ergibt sich aus der ersten Darstellung für die Vertauschung der beiden letzten Horizontalreihen. Dasselbe würde sich aus den entsprechenden anderen Entwickelungen der Determinante für die Vertauschung von zwei beliebigen Zeilen oder von zwei Kolonnen ergeben. Man hat also den Satz:

> Die Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man die Elemente von zwei beliebigen Parallelreihen miteinander vertauscht.

Infolge dieser Eigenschaft kann man nun der Lösung (2a) unseres Gleichungssystemes eine Form geben, welche der für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gefundenen völlig analog ist. Da nämlich

$$|d, b, c| = |b, c, d|, \quad |a, d, c| = -|c, d, a|, \quad |a, b, d| = |d, a, b|$$

ist, so läßt sich die Lösung unseres Gleichungssystemes folgendermaßen als eine fortlaufende Proportion schreiben

$$(2b) \qquad x:y:z:1 = -|b, c, d|:|c, d, a|:-|d, a, b|:|a, b, c|.$$

Auch hier sind die vier Determinanten, die auf der rechten Seite dieser Gleichung auftreten, die einzigen ihrem absoluten Werte nach verschiedenen, welche aus dem Koeffizientensysteme oder der Matrix

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a', & b', & c', & d' \\ a'', & b'', & c'', & d'' \end{pmatrix}$$

der drei linearen Funktionen (f, f', f'') durch Weglassung je einer Kolonne gebildet werden können; und auch hier sind ihre Vertikalreihen so angeordnet, daß die vier Determinanten aus der ersten durch

cyklische Vertauschung der Buchstaben (a, b, c, d) hervorgehen. Nennt man also die Determinante $|b, c, d|$, deren Elemente aus dem Systeme (3) durch Weglassung der Koeffizienten von x erhalten werden, die x entsprechende Determinante und bezeichnet analog die drei anderen als beziehlich $y, z, 1$ entsprechend, so kann man das soeben gefundene Resultat folgendermaßen aussprechen:

> Es verhält sich $x:y:z:1$ wie die vier entsprechenden Determinanten des Systemes (3), aber mit abwechselnden Vorzeichen.

Aus den Entwickelungen des vorigen Abschnittes ging bis jetzt nur hervor, daß durch die Gleichung (2b) die Lösung des abgeleiteten Gleichungssystemes $(F=0,\ F'=0,\ F''=0)$ bestimmt ist; wir hatten aber bereits erkannt, daß das ursprüngliche System $(f=0,\ f'=0,\ f''=0)$ jedenfalls keine andere Lösung haben kann. Besitzt dasselbe also überhaupt eine Lösung, so muß es die hier gefundene sein. Um nun zu zeigen, daß durch die in (2b) gefundenen Werte

$$x=-\frac{|b,c,d|}{|a,b,c|},\quad y=\frac{|c,d,a|}{|a,b,c|},\quad z=-\frac{|d,a,b|}{|a,b,c|}$$

jene Gleichungen erfüllt werden, setzen wir diese Werte in dieselben ein; multiplizieren wir dann noch mit dem gemeinsamen Nenner $|a, b, c|$, so ergeben sich die folgenden drei Gleichungen

$$(4)\quad \begin{matrix} a \\ -a' \\ a'' \end{matrix}\begin{vmatrix} b, & c, & d \\ b', & c', & d' \\ b'', & c'', & d'' \end{vmatrix} \begin{matrix} b \\ +b' \\ b'' \end{matrix}\begin{vmatrix} c, & d, & a \\ c', & d', & a' \\ c'', & d'', & a'' \end{vmatrix} \begin{matrix} c \\ -c' \\ c'' \end{matrix}\begin{vmatrix} d, & a, & b \\ d', & a', & b' \\ d'', & a'', & b'' \end{vmatrix} \begin{matrix} d \\ +d' \\ d'' \end{matrix}\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

wo durch die Schreibweise angedeutet werden soll, daß jene Gleichung für jedes der drei Koeffizientensysteme (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d'') gilt. Von der Gültigkeit dieser Identitäten kann man sich zwar auch durch Ausrechnung überzeugen, jedoch folgt sie auch unmittelbar aus den obigen Determinanteneigenschaften. Ist sie zunächst für das erste Koeffizientensystem (a, b, c, d) bewiesen, so gilt sie auch für das zweite und dritte; denn wenn die Indizes cyklisch vertauscht werden, so bleiben die vier Determinanten ungeändert, während die vier Koeffizienten (a, b, c, d) in (a', b', c', d') übergehen. Betrachtet man also nur die erste Gleichung

$$(5)\qquad -a|b,c,d|+b|c,d,a|-c|d,a,b|+d|a,b,c|=0,$$

so ist ihre linke Seite in den vier Elementen (a, b, c, d) offenbar homogen von der zweiten Dimension; betrachtet man nun nur die-

jenigen Glieder, welche je zwei dieser Elemente enthalten, etwa a und b, so heben sich diese gegenseitig fort; setzt man nämlich $c = d = 0$, so geht jene Gleichung über in

$$-a \begin{vmatrix} b, & 0, & 0 \\ b', & c', & d' \\ b'', & c'', & d'' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0, & 0, & a \\ c', & d', & a' \\ c'', & d'', & a'' \end{vmatrix} \equiv 0,$$

und ein Gleiches gilt für alle Teile des Ausdruckes (5).

Es ergibt sich also der Satz:

Die drei linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ f' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{aligned}$$

besitzen für unbestimmte Werte der Koeffizienten eine und nur eine Auflösung, welche durch die Gleichung

$$x:y:z:1 = -|b, c, d| : |c, d, a| : -|d, a, b| : |a, b, c|$$

gegeben ist; und zwar sind die Ausdrücke auf der rechten Seite die beziehlich x, y, z, 1 entsprechenden Determinanten dritter Ordnung, welche aus dem Koeffizientensysteme der drei Funktionen (f, f', f'') gebildet werden können, mit abwechselnden Vorzeichen.

Achte Vorlesung.

Herleitung der Eigenschaften der Determinanten dritter Ordnung aus dem Charakter der Lösung dreier linearer Gleichungen. — Eindeutigkeit der Lösung. — Untersuchung der Nenner in jener Lösung. — Die Beziehung der Zähler in der Lösung zu ihrem gemeinsamen Nenner $\Theta(a, b, c)$. — Die Fundamentaleigenschaften der Funktion $\Theta(a, b, c)$ — Beweis des Multiplikationstheoremes für die Funktion $\Theta(a, b, c)$. — Anderer Beweis desselben Theoremes. — Die Funktion $\Theta(a, b, c)$ ist mit der Determinante $|a, b, c|$ identisch.

§ 1.

Durch die Auflösung der drei linearen Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\\ f' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0\\ f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{aligned}$$

waren wir von selbst auf die Determinanten dritter Ordnung geführt worden, weil sich x, y und z als Determinantenquotienten ergaben. Wir fanden dann die Grundeigenschaften dieser Gebilde im wesentlichen durch eine direkte Ausrechnung, also auf einem Wege, welcher uns bei dem Falle von n Gleichungen verschlossen ist. Da sich aber bei der Auflösung der Gleichungen (1) x, y und z als Quotienten von Determinanten ergaben, so müssen wir die charakteristischen Eigenschaften der Determinaten finden, wenn wir die Lösung jener drei Gleichungen betrachten.

Für den allgemeinen Fall von n Gleichungen mit n Unbekannten, wo uns die direkte Methode der Ausrechnung nicht mehr zu Gebote steht, ist es nun von grofser Wichtigkeit, die vorher gefundenen Eigenschaften der Lösung direkt aus der Natur der Aufgabe, nicht aus der von uns befolgten Methode der Auflösung zu erschliefsen, und wir wollen diese Untersuchungen deshalb schon hier durchführen, weil sie mit denen für den allgemeinen Fall im wesentlichen identisch sind, hier aber leicht auf rechnendem Wege verifiziert werden können.

Wir wollen daher über die Lösung der Gleichungen (1) nur den folgenden Satz voraussetzen, welcher sich schon aus den elementaren Betrachtungen des § 1 der vorigen Vorlesung, nämlich aus der successiven Elimination von z und von y aus (1) unmittelbar ergibt:

Sind die zwölf Koeffizienten (a, b, c, d) der linearen Gleichungen (1) unbestimmte Größen, so besitzen diese mindestens eine Lösung, in welcher x, y und z rationale Funktionen jener Koeffizienten sind.

Oder was dasselbe ist:

Es gibt drei rationale Funktionen von $(a, b, c, d, \ldots)$, welche für x, y, z in die Gleichungen (1) eingesetzt, diese identisch befriedigen.

Um uns aber von den vorher durchgeführten Betrachtungen über die Determinanten zweiter Ordnung unabhängig zu machen, wollen wir weiter in unsere Voraussetzungen aufnehmen, daß auch zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten mindestens eine und zwar eine rationale Lösung besitzen, sobald ihre Koeffizienten unbestimmt sind, und wir wollen jetzt aus diesen fast selbstverständlichen Sätzen alle Eigenschaften der Lösung von (1) allein durch sorgfältige Untersuchung jener Gleichungen herleiten.

§ 2.

Wir machen also die Voraussetzung, daß jedes System

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
f &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\\
f' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0\\
f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0
\end{aligned}
$$

mit unbestimmten Koeffizienten **mindestens** eine Lösung besitzt, und beweisen zunächst, daß diese Gleichungen **nur** eine Lösung haben, d. h. daß x, y, z durch sie eindeutig bestimmt sind. Um dies zuerst für x zu beweisen, betrachten wir an Stelle des Systemes (1) die eine abgeleitete Gleichung

$$
(2)\qquad F = Pf + P'f' + f'' = 0,
$$

welche offenbar durch jede Lösung von (1) befriedigt wird, und bestimmen die noch willkürlichen Größen P und P' so, daß die Koeffizienten von y und z verschwinden, d. h. so, daß die beiden Bedingungsgleichungen

$$
(2\text{a})\qquad
\begin{aligned}
Pb + P'b' + b'' &= 0\\
Pc + P'c' + c'' &= 0
\end{aligned}
$$

erfüllt sind. Da die sechs Koeffizienten dieser beiden Gleichungen unbestimmte Größen sind, so besitzen sie nach unserer allgemeinen Voraussetzung mindestens eine Lösung, und P und P' hängen allein

und zwar rational von den Koeffizienten $\begin{pmatrix} b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{pmatrix}$, nicht aber von d, d' und d'' ab. Es sei nun (P, P') eine Lösung der beiden Gleichungen (2a), so muſs x auch notwendig die abgeleitete Gleichung

$$F = (Pa + P'a' + a'')x + (Pd + P'd' + d'') = 0$$

in (2) befriedigen, und da der Koeffizient von x für unbestimmte (a, a', a'') nicht identisch verschwindet, so erhält man für x den einen Wert

$$x = -\frac{Pd + P'd' + d''}{Pa + P'a' + a''}; \tag{2b}$$

es gibt somit in der Tat nur einen einzigen Wert für x. Ganz ebenso läſst sich beweisen, daſs unter der gemachten Voraussetzung auch y und z eindeutig bestimmt sind.

Nimmt man nun noch die zweite im vorigen Abschnitte gemachte Voraussetzung hinzu, so kann man den Satz aussprechen:

> Unter der Voraussetzung, daſs jedes System (1) von zwei oder drei linearen Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten überhaupt rationale Lösungen besitzt, hat sich ergeben, daſs ein solches System eine und nur eine Lösung hat, und daſs diese eine rationale Funktion der Gleichungskoeffizienten ist.

Bei diesem Beweise war nur vorausgesetzt worden, daſs die neun Koeffizienten $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ Unbestimmte sind, während die konstanten Glieder d, d', d'' auch beliebige spezielle Zahlwerte haben können. Wir können daher auch den für die Folge wichtigen Satz aussprechen:

> Durch drei lineare Gleichungen, in denen die Koeffizienten der drei Unbekannten Unbestimmte sind, während ihre konstanten Glieder d, d', d'' beliebige Zahlwerte haben können, sind die Werte der Unbekannten eindeutig bestimmt.

Sind speziell $d = d' = d'' = 0$, betrachtet man also die drei homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \end{aligned}$$

so besitzen diese nach dem soeben bewiesenen Satze für unbestimmte (a, b, c) die Lösung $(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$ und keine andere.

Die einzige Lösung der drei Gleichungen (1) besitzt hiernach die folgende Form

$$(3) \qquad x = \frac{\Phi_1(a, b, c, d)}{\Theta_1(a, b, c, d)}, \quad y = \frac{\Phi_2(a, b, c, d)}{\Theta_2(a, b, c, d)}, \quad z = \frac{\Phi_3(a, b, c, d)}{\Theta_3(a, b, c, d)},$$

wo die Zähler und Nenner ganze ganzzahlige Funktionen der zwölf Gleichungskoeffizienten sind und nicht identisch verschwinden; der Einfachheit wegen sollen immer nur die vier ersten Buchstaben angegeben werden. Wir wollen nun untersuchen, welche Eigenschaften diese sechs ganzen Funktionen haben müssen, welche als Zähler und Nenner der Lösung auftreten.

Hier soll aber von vornherein vorausgesetzt werden, daſs jene Brüche in der sogenannten reduzierten Form hingeschrieben sind, daſs nämlich etwaige gemeinsame Faktoren von Zähler und Nenner jener drei Brüche bereits durch Heben beseitigt sind. So hatte sich ja z. B. im § 1 der vorigen Vorlesung ergeben, daſs bei der dort charakterisierten Auflösungsmethode Zähler und Nenner von x und y den gemeinsamen Faktor c enthielten, welcher erst durch Heben beseitigt werden muſste, um die reduzierte Form zu erhalten. Ähnlich könnte es geschehen, daſs Zähler und Nenner entweder eine Zahl oder eine ganze Funktion der Gleichungskoeffizienten als gemeinsamen Teiler enthalten. In einer späteren Vorlesung wird ein Verfahren angegeben werden, durch das man den gröſsten gemeinsamen Teiler von zwei solchen ganzen Funktionen bestimmen und diese in ihre unzerlegbaren oder Primfaktoren dekomponieren kann; wir wollen dieses Verfahren schon hier als bekannt voraussetzen, und denken uns mit Hilfe desselben jene drei Brüche von vornherein in ihrer reduzierten Form gegeben.

Wir wollen nun zunächst die Unbekannten x, y, z als Funktionen von (d, d', d'') allein betrachten und allein aus der Betrachtung der Gleichungen (1) beweisen, daſs x, y, z homogene lineare Funktionen von d, d', d'' sind. Diese Tatsache folgt auch aus der Gleichung (2b) und den entsprechenden für y und z, sie soll aber jetzt noch einmal aus der Natur der linearen Gleichungen erschlossen werden.

Bezeichnet man mit

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$$

die drei ebenfalls eindeutig bestimmten Lösungen der einfachen Gleichungssysteme

$$(4) \quad \begin{aligned} &a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0, \qquad &&a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 = 0\\ &a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 = 0, &&a'x_2 + b'y_2 + c'z_2 + d' = 0\\ &a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 = 0, &&a''x_2 + b''y_2 + c''z_2 = 0\\ &\qquad a\,x_3 + b\,y_3 + c\,z_3 = 0\\ &\qquad a'x_3 + b'y_3 + c'z_3 = 0\\ &\qquad a''x_3 + b''y_3 + c''z_3 + d'' = 0, \end{aligned}$$

und nennt man (x, y, z) wie vorher die Lösung der allgemeinen Gleichungen (1), so erhält man sofort die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 + x_3 \\
y &= y_1 + y_2 + y_3 \qquad (5)\\
z &= z_1 + z_2 + z_3.
\end{aligned}
$$

Jede der Unbekannten stellt sich also als Summe von drei Funktionen von je einer der drei Gröfsen d, d', d'' allein dar. Um nun zu erkennen, wie jene Funktionen von ihren Argumenten abhängen, zerlegen wir z. B. d in zwei Summanden d_1 und d_2 und betrachten die Lösungen der beiden Gleichungssysteme

$$
(6) \quad
\begin{array}{l|l}
a\,\xi_1 + b\,\eta_1 + c\,\zeta_1 + d_1 = 0 & a\,\xi_2 + b\,\eta_2 + c\,\zeta_2 + d_2 = 0 \\
a'\,\xi_1 + b'\,\eta_1 + c'\,\zeta_1 \qquad = 0 & a'\,\xi_2 + b'\,\eta_2 + c'\,\zeta_2 \qquad = 0 \\
a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1 \qquad = 0 & a''\xi_2 + b''\eta_2 + c''\zeta_2 \qquad = 0.
\end{array}
$$

Dann ist offenbar

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad y_1 = \eta_1 + \eta_2, \quad z_1 = \zeta_1 + \zeta_2.$$

Setzt man also

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(d), & y_1 &= \psi(d), & z_1 &= \chi(d), \\
&= \varphi(d_1 + d_2), & &= \psi(d_1 + d_2), & &= \chi(d_1 + d_2),
\end{aligned}
$$

also auch

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \varphi(d_1), & \eta_1 &= \psi(d_1), & \zeta_1 &= \chi(d_1) \\
\xi_2 &= \varphi(d_2), & \eta_2 &= \psi(d_2), & \zeta_2 &= \chi(d_2),
\end{aligned}
$$

so hat jede dieser Funktionen die Eigenschaft, dafs z. B.

$$\varphi(d_1 + d_2) = \varphi(d_1) + \varphi(d_2)$$

ist. Hieraus folgt speziell, dafs

$$\frac{\varphi(d_1 + d_2) - \varphi(d_1)}{d_2} = \frac{\varphi(d_2)}{d_2},$$

also unabhängig von d_1 ist. Dasselbe gilt also auch für ein unendlich kleines d_2 von dem Differentialquotienten von $\varphi(d_1)$, d. h. es ist

$$\varphi'(d) = C,$$

oder

$$x_1 = \varphi(d) = Cd,$$

wo C eine von d, d', d'' unabhängige Gröfse bedeutet, welche also nur von den neun Koeffizienten $(a, b, c, a', b', c', \ldots)$ abhängt.

Da nun für jede der beiden Funktionen x_2 und x_3 Ähnliches bewiesen werden kann, so folgt aus der Gleichung (5)

$$(7) \qquad x = \Phi(d, d', d'') = Cd + C'd' + C''d'',$$

wo C, C', C'' nur noch von den neun Koeffizienten (a, b, c) abhängen. Ganz dasselbe gilt offenbar auch von y und z.

In den Ausdrücken (3) für x, y, z sind also die drei Nenner sämtlich von d, d', d'' unabhängig, während die Zähler homogene lineare Funktionen dieser drei Größen sind. Wir können die Gleichungen (3) jetzt also folgendermaßen schreiben

$$(8)\quad \begin{aligned} x &= \frac{\Phi_1(a, b, c, d)}{\Theta_1(a, b, c)} = \frac{dC + d'C' + d''C''}{\Theta_1} \\ y &= \frac{\Phi_2(a, b, c, d)}{\Theta_2(a, b, c)} = \frac{dD + d'D' + d''D''}{\Theta_2} \\ z &= \frac{\Phi_3(a, b, c, d)}{\Theta_3(a, b, c)} = \frac{dE + d'E' + d''E''}{\Theta_3}, \end{aligned}$$

wo die C, D, E und Θ ganze Funktionen der neun Größen (a, b, c) allein sind.

§ 3.

Es soll nun der grundlegende Nachweis geführt werden, daß bei der soeben gefundenen Darstellung der Lösung unseres Gleichungssystemes

$$(1)\qquad f = ax + by + cz + d = 0,$$

wo jetzt der Kürze wegen jedesmal nur die erste Gleichung hingeschrieben werden soll, d. h. bei der Darstellung

$$(1\text{a})\qquad x = \frac{\Phi_1(a, b, c, d)}{\Theta_1(a, b, c)},\quad y = \frac{\Phi_2(a, b, c, d)}{\Theta_2(a, b, c)},\quad z = \frac{\Phi_3(a, b, c, d)}{\Theta_3(a, b, c)}$$

die drei Nenner identisch sind; zu diesem Zwecke wollen wir zeigen, daß jeder dieser Nenner durch jeden anderen teilbar ist. Es genügt hier nachzuweisen, daß z. B. der zweite Nenner Θ_2 den ersten Θ_1 als Faktor enthält, da die Beweise für die anderen Nenner ganz entsprechend geführt werden können.

Um dies zu zeigen, führen wir an Stelle von (x, y, z) die neuen Unbekannten (x', y', z') durch die Gleichungen

$$(2)\qquad x = x',\quad y = y' + tx',\quad z = z'$$

ein, wo t eine unbestimmte Größe bedeutet; dann ist umgekehrt

$$(2\text{a})\qquad x' = x,\quad y' = y - tx,\quad z' = z,$$

und (x', y', z') sind durch die neuen Gleichungen bestimmt

$$(3)\qquad f_1 = (a + bt)x' + by' + cz' + d = 0.$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$(3\text{a})\qquad a + bt = a_1,\quad a' + b't = a_1',\quad a'' + b''t = a_1'',$$

so werden (x', y', z') durch die Gleichungen

$$
(3b)\qquad
\begin{aligned}
a_1 x' + b\, y' + c\, z' + d\, &= 0\\
a_1' x' + b' y' + c' z' + d' &= 0\\
a_1'' x' + b'' y'' + c'' z' + d'' &= 0
\end{aligned}
$$

ebenfalls **eindeutig** bestimmt, und zwar wird nach (1a)

$$
(4)\qquad x' = \frac{\Phi_1(a_1, b, c, d)}{\Theta_1(a_1, b, c)},\quad y' = \frac{\Phi_2(a_1, b, c, d)}{\Theta_2(a_1, b, c)},\quad z' = \frac{\Phi_3(a_1, b, c, d)}{\Theta_3(a_1, b, c)},
$$

wo nur die dort auftretenden Koeffizienten a, a', a'' durch die neuen a_1, a_1', a_1'' ersetzt sind.

Da nun $y' = y - tx$ ist, so muſs für ein unbestimmtes t die Identität bestehen

$$
(5)\qquad \frac{\Phi_2(a_1)}{\Theta_2(a_1)} = \frac{\Phi_2(a)}{\Theta_2(a)} - t\,\frac{\Phi_1(a)}{\Theta_1(a)},
$$

wo der Einfachheit wegen die Argumente b, c, d in der Bezeichnung fortgelassen sind.

In dieser Identität bringen wir die rechte Seite auf gleichen Nenner. Es sei T der gröſste gemeinsame Teiler der beiden Nenner, so daſs also

$$
(6)\qquad \Theta_1 = T\,\Psi_1 \quad \text{und} \quad \Theta_2 = T\,\Psi_2
$$

ist, und Ψ_1 und Ψ_2 keinen gemeinsamen Faktor mehr besitzen. Dann kann die Gleichung (5) folgendermaſsen geschrieben werden

$$
(7)\qquad \frac{\Phi_2(a_1)}{\Theta_2(a_1)} = \frac{\Phi_2\,\Psi_1 - t\,\Psi_2\,\Phi_1}{T\,\Psi_1\,\Psi_2},
$$

wo die Funktionen, welche auf der rechten Seite im Zähler und Nenner stehen, t gar nicht enthalten.

Man kann nun zeigen, daſs der Bruch auf der rechten Seite in seiner reduzierten Form erscheint, d. h. daſs Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler haben können, der sich fortheben würde. Da nämlich der Nenner t gar nicht enthält, so müſste jener Teiler in jedem der beiden Terme des Zählers enthalten sein, d. h. es müſsten die drei Produkte

$$
(8)\qquad (T\,\Psi_1\,\Psi_2,\quad \Phi_2\,\Psi_1,\quad \Psi_2\,\Phi_1)
$$

einen und denselben Faktor besitzen. Nun hat aber keines der fünf Paare von Funktionen

$$
(9)\qquad
\begin{gathered}
(\Phi_1\ T),\quad (\Phi_2,\ T)\\
(\Phi_1,\ \Psi_1),\quad (\Phi_2,\ \Psi_2)\\
(\Psi_1,\ \Psi_2)
\end{gathered}
$$

einen Teiler; die beiden ersten und die beiden zweiten Paare haben keinen Teiler, weil $\frac{\Phi_1}{\Theta_1} = \frac{\Phi_1}{T\Psi_1}$ und $\frac{\Phi_2}{\Theta_2} = \frac{\Phi_2}{T\Psi_2}$ nach der Voraussetzung

in der reduzierten Form gegeben sind, das letzte Paar, weil Ψ_1 und Ψ_2 die von dem gemeinsamen Divisor T befreiten Teile von Θ_1 und Θ_2 sind.

Angenommen nun, es existierte ein selbst nicht weiter zerlegbarer Teiler P der drei Produkte (8), so müßte er auch in $T\Psi_1\Psi_2$, also in einer der Funktionen Ψ_1, Ψ_2 oder in T enthalten sein. Wäre aber P z. B. in Ψ_1 enthalten, so müßte er ferner in dem Produkte $\Phi_1\Psi_2$ vorkommen, und das ist nicht möglich, weil Ψ_1 weder mit Φ_1 noch mit Ψ_2 einen gemeinsamen Teiler hat. Ganz dasselbe gilt, wenn P ein Faktor von Ψ_2 wäre. In T kann endlich jener Teiler auch nicht enthalten sein, denn da T zu Φ_1 und Φ_2 relativ prim ist, so müßte jener Teiler zugleich in Ψ_1 und Ψ_2 enthalten sein, und das streitet mit der Voraussetzung, daß Ψ_1 und Ψ_2 relativ prim zueinander sind.

Damit ist also bewiesen, daß der Bruch auf der rechten Seite von (7) in der Tat in der reduzierten Form erscheint. Da aber nach (5) der Bruch $\frac{\Phi_2(a_1)}{\Theta_2(a_1)}$ jenem reduzierten Bruche identisch gleich ist, so folgt, daß sein Zähler und Nenner sich von den entsprechenden Ausdrücken auf der rechten Seite von (7) nur durch einen gemeinsamen Faktor unterscheiden können, der sich dann eben forthebt. Es ist also der Nenner $\Theta_2(a_1)$ des ersten Bruches für einen unbestimmten Wert von t durch den Nenner $T\Psi_1\Psi_2$ der rechten Seite, also a fortiori durch $T\Psi_1 = \Theta_1(a)$ teilbar, d. h. es ist für ein variables t

$$\Theta_2(a_1) = \Theta_1(a) \cdot G(a, b, c, t),$$

wo G eine ganze ganzzahlige Funktion von (a, b, c, t) bedeutet.

Hieraus ergibt sich speziell für $t = 0$, weil da $a_1 = a$, $a_1' = a'$, $a_1'' = a''$ wird,

$$\Theta_2(a, b, c) = \Theta_1(a, b, c) \cdot G(a, b, c, 0).$$

Es ist also Θ_2 durch Θ_1 teilbar. Da man nun ganz ebenso zeigen kann, daß Θ_1 auch Θ_2 enthält, so folgt, daß Θ_1 sich von Θ_2 höchstens durch das Vorzeichen unterscheiden kann, da jeder Teiler der einen Funktion (auch die Zahlenteiler) in der anderen enthalten ist. Wir können und wollen nun das Vorzeichen von Θ_2 so bestimmen, daß jene beiden Nenner einander gleich sind; und da auch für Θ_3 ganz dasselbe gilt, so ist dann in der Tat

$$\Theta_1(a, b, c) = \Theta_2(a, b, c) = \Theta_3(a, b, c).$$

Setzen wir also diesen gemeinsamen Nenner gleich $\Theta(a, b, c)$, so erhält man jetzt für x, y, z die folgende Darstellung

$$x = \frac{\Phi_1(a, b, c, d)}{\Theta(a, b, c)}, \quad y = \frac{\Phi_2(a, b, c, d)}{\Theta(a, b, c)}, \quad z = \frac{\Phi_3(a, b, c, d)}{\Theta(a, b, c)},$$

wo Φ_1, Φ_2, Φ_3 in (d, d', d'') sämtlich homogen und linear sind, während der gemeinsame Nenner von (d, d', d'') unabhängig ist.

§ 4.

Wir wollen endlich untersuchen, in welcher Beziehung die Zähler der vorher gefundenen Lösung

$$(1)\qquad x = \frac{\Phi_1(a, b, c, d)}{\Theta(a, b, c)}, \quad y = \frac{\Phi_2(a, b, c, d)}{\Theta(a, b, c)}, \quad z = \frac{\Phi_3(a, b, c, d)}{\Theta(a, b, c)}$$

des Gleichungssystemes

$$(1\text{a})\qquad ax + by + cz + d = 0$$

zu ihrem gemeinsamen Nenner stehen. Auch hier ersetzen wir die Unbekannten (x, y, z) durch neue (x', y', z') vermittelst der Gleichungen

$$(2)\qquad x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{y}{x}, \quad z' = \frac{z}{x} \;\Big|\; x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}, \quad z = \frac{z'}{x'}.$$

Dieselben sind dann die ebenfalls eindeutig bestimmten Lösungen des Gleichungssystemes

$$(2\text{a})\qquad dx' + by' + cz' + a = 0,$$

welches man aus (1a) erhält, indem man dort (x, y, z) durch ihre Ausdrücke in (x', y', z') ersetzt und alsdann mit dem gemeinsamen Nenner x' multipliziert.

Dieses Gleichungssystem geht aber offenbar aus dem gegebenen in (1a) durch Vertauschung der Koeffizienten (a, a', a'') und (d, d', d'') hervor. Durch dieselbe Vertauschung wird man demnach die Werte von (x', y', z') aus den in (1) gefundenen von (x, y, z) erhalten.

Es ist also

$$(2\text{b})\qquad x' = \frac{\Phi_1(d, b, c, a)}{\Theta(d, b, c)}, \quad y' = \frac{\Phi_2(d, b, c, a)}{\Theta(d, b, c)}, \quad z' = \frac{\Phi_3(d, b, c, a)}{\Theta(d, b, c)}.$$

Da aber $x' = \frac{1}{x}$ ist, so ergibt sich durch Vergleichung von (2b) mit (1) die Identität

$$(3)\qquad \frac{\Phi_1(d, b, c, a)}{\Theta(d, b, c)} = \frac{\Theta(a, b, c)}{\Phi_1(a, b, c, d)}.$$

Nun sind aber beide Ausdrücke nach der Voraussetzung in der reduzierten Form, denn sowohl in x' als auch in x haben Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler. Es können sich somit in (3) die Zähler und auch die Nenner nur durch das Vorzeichen unterscheiden, d. h. es mufs sein

$$(4)\qquad \Phi_1(a, b, c, d) = \pm\, \Theta(d, b, c).$$

Der Zähler von x geht also, abgesehen von dem noch unbestimmt bleibenden Vorzeichen, dadurch aus dem Nenner hervor, dafs man dort die Elemente (a, a', a'') beziehlich ersetzt durch (d, d', d'').

Offenbar kann man denselben Beweis auch für y und z führen; nur tritt da an Stelle von (a, a', a'') das System (b, b', b'') bezw. (c, c', c''), und man erhält

$$\Phi_2(a, b, c, d) = \pm\, \Theta(a, d, c)$$
$$\Phi_3(a, b, c, d) = \pm\, \Theta(a, b, d).$$

Demnach erhält man für die Lösung unseres Gleichungssystemes nunmehr die Ausdrücke

$$(5) \qquad x = \pm \frac{\Theta(d, b, c)}{\Theta(a, b, c)}, \quad y = \pm \frac{\Theta(a, d, c)}{\Theta(a, b, c)}, \quad z = \pm \frac{\Theta(a, b, d)}{\Theta(a, b, c)},$$

wo nur noch die Vorzeichen zu bestimmen sind.

Diese letzte Frage kann nun sehr einfach durch die folgende Betrachtung entschieden werden. Um das Vorzeichen von x zu bestimmen, betrachten wir die Gleichungen, welche aus (1) hervorgehen, wenn wir die konstanten Glieder (d, d', d'') beziehlich gleich (a, a', a'') setzen, d. h. die drei Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + a\, &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + a' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + a'' &= 0. \end{aligned}$$

Auch diese Gleichungen besitzen nach dem zweiten Satze auf S. 117 für unbestimmte (a, b, c) eine und nur eine Lösung, und diese geht demnach aus der allgemeinen in Nr. (5) dadurch hervor, daſs man dort die d durch die a ersetzt; da der gemeinsame Nenner sicher von Null verschieden ist, so erscheint diese Lösung nicht etwa in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Es muſs also sein

$$(7) \quad x = \pm \frac{\Theta(a, b, c)}{\Theta(a, b, c)} = \pm 1, \quad y = \pm \frac{\Theta(a, a, c)}{\Theta(a, b, c)}, \quad z = \pm \frac{\Theta(a, b, a)}{\Theta(a, b, c)}.$$

Nun erkennt man aber sofort, daſs jene Gleichungen (6) durch das Wertsystem

$$(7\text{a}) \qquad x = -1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

befriedigt werden. In dem Ausdrucke für x ist also das negative Vorzeichen zu wählen. Ganz analog findet man dasselbe Resultat für y und für z. Man erhält also den folgenden wichtigen Satz:

Unter der Voraussetzung, daſs drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten für unbestimmte Werte der Koeffizienten mindestens eine rationale Lösung haben, besitzen sie auch nur eine, und diese muſs notwendig die Form haben

$$(8) \quad x = -\frac{\Theta(d, b, c)}{\Theta(a, b, c)}, \quad y = -\frac{\Theta(a, d, c)}{\Theta(a, b, c)}, \quad z = -\frac{\Theta(a, b, d)}{\Theta(a, b, c)},$$

wo $\Theta(a, b, c)$ eine ganze ganzzahlige Funktion der neun Elemente $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ ist. Die Werte der Unbekannten stellen sich also dar als Quotienten einer und derselben Funktion Θ für verschiedene Argumente.

§ 5.

Aus diesem Satze ergibt sich nun eine Reihe wichtiger Eigenschaften der Funktion Θ. Zunächst kann diese Funktion keine Zahlenfaktoren besitzen, weil nach der Voraussetzung die oben in (8) gefundenen Brüche in der reduzierten Form gegeben sind, und entgegengesetzten Falles die Zähler dieselben Zahlenfaktoren haben müſsten.

Ferner war vorher bewiesen worden, daſs die Zähler $\Theta(d, b, c)$, $\Theta(a, d, c)$, $\Theta(a, b, d)$ von x, y, z sämtlich in Bezug auf (d, d', d'') homogen und linear sind. Da nun diese drei Zähler aus dem gemeinsamen Nenner $\Theta(a, b, c)$ dadurch hervorgehen, daſs man beziehlich die Koeffizienten (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c'') ersetzt durch (d, d', d''), so folgt hieraus, daſs der gemeinsame Nenner $\Theta(a, b, c)$ sowohl in Bezug auf die drei Koeffizienten a, als auch auf die b und die c eine homogene lineare Funktion ist. Man hat also den Satz:

> Die Funktion $\Theta(a, b, c)$ ist eine ganze ganzzahlige Funktion der neun Argumente
>
> $$(1) \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$
>
> ohne gemeinsame Zahlenfaktoren, welche in Bezug auf die Elemente einer jeden Kolonne des obigen Koeffizientensystemes homogen und linear ist.

Da Θ eine ganze Funktion von den neun Elementen (a, b, c) ist, welche in Bezug auf die Elemente a, b und c homogen und linear ist, so muſs jedes ihrer Glieder ein und nur ein Element aus einer jeden Kolonne von (1) enthalten, also aus lauter Termen von der Form abc zusammengesetzt sein. Man hat also als Korollar den Satz:

> Die Funktion Θ ist in ihren Elementen (a, b, c) homogen und von der dritten Dimension.

Aus der Vergleichung der beiden Wertsysteme (7) und (7a) des vorigen Abschnittes, welche notwendig identisch sein müssen, kann man nun noch eine weitere wichtige Eigenschaft der Funktion Θ herleiten. Vergleicht man nämlich die Werte von y und von z miteinander, so erhält man, da $\Theta(a, b, c) \gtrless 0$ ist, die beiden Gleichungen

$$\Theta(a, a, c) = 0, \quad \Theta(a, b, a) = 0, \tag{2}$$

d. h. die Funktion Θ verschwindet identisch, wenn die Elemente der zweiten oder der dritten Vertikalreihe denen der ersten gleich werden. Ganz entsprechend kann man diesen Satz für je zwei Vertikalreihen beweisen; man erhält also den Satz:

> Die Funktion Θ verschwindet identisch, wenn die entsprechenden Elemente zweier Kolonnen einander gleich sind.

Dieser Satz in Verbindung mit dem vorletzten liefert eine weitere charakteristische Eigenschaft der Funktion Θ. Ersetzt man nämlich in Θ die Elemente a, a', a'' beziehlich durch $a + \alpha$, $a' + \alpha'$, $a'' + \alpha''$ und berücksichtigt, daſs Θ linear und homogen in den Elementen der ersten Vertikalreihe ist, so ergibt sich

$$\Theta(a + \alpha, b, c) = \Theta(a, b, c) + \Theta(\alpha, b, c),$$

wo zur Abkürzung wieder jedesmal nur die erste Horizontalreihe der Elemente hingeschrieben ist; ersetzt man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Elemente (b, b', b'') beziehlich wieder durch

$$(b + \beta, b' + \beta', b'' + \beta'')$$

und berücksichtigt, daſs Θ auch für die Elemente der zweiten Vertikalreihe homogen und linear ist, so ergibt sich

$$\Theta(a + \alpha, b + \beta, c) = \Theta(a, b, c) + \Theta(\alpha, b, c) + \Theta(a, \beta, c) + \Theta(\alpha, \beta, c).$$

Setzen wir in dieser Identität $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ beziehlich gleich (b, b', b'') und (β, β', β'') gleich (a, a', a''), so geht sie über in

$$\Theta(a + b, a + b, c) = \Theta(a, b, c) + \Theta(b, b, c) + \Theta(a, a, c) + \Theta(b, a, c),$$

oder wenn man diejenigen Funktionen Θ fortläſst, in denen zwei Argumente, d. h. hier zwei Vertikalreihen einander gleich sind,

$$\Theta(a, b, c) + \Theta(b, a, c) = 0$$
$$\Theta(a, b, c) = -\Theta(b, a, c).$$

Ganz ebenso könnte man beweisen, daſs die Funktion Θ nur ihr Zeichen ändert, wenn man die Elemente irgend zweier Vertikalreihen vertauscht. Man erhält also den Satz:

Die Funktion Θ ändert nur ihr Zeichen bei der Vertauschung von zwei beliebigen Kolonnen.

Hiernach kann man die Lösung unseres Gleichungssystemes in (8) des § 4 auch folgendermaßen schreiben

(3) $$x = -\frac{\Theta(b, c, d)}{\Theta(a, b, c)}, \quad y = +\frac{\Theta(c, d, a)}{\Theta(a, b, c)}, \quad z = -\frac{\Theta(d, a, b)}{\Theta(a, b, c)},$$

oder in Form einer Proportion

(3a) $$x : y : z : 1 = -\Theta(b, c, d) : \Theta(c, d, a) : -\Theta(d, a, b) : \Theta(a, b, c).$$

Die beiden letzten für die Vertikalreihen des Koeffizientensystemes von Θ bewiesenen Sätze gelten auch für seine Horizontalreihen.

Wir gehen zum Beweise dieser wichtigen Tatsache wiederum aus von dem ursprünglichen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ f' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{aligned}$$

und leiten aus ihm eine neue Gleichung ab

(4) $$F = pf + p'f' + p''f'' = 0,$$

wo jetzt p, p', p'' so bestimmt sein sollen, daß der Koeffizient von x gleich (-1), die von y und z gleich Null sind. Dann müssen p, p', p'' die drei Gleichungen befriedigen

(4a) $$\begin{aligned} pa + p'a' + p''a'' + 1 &= 0 \\ pb + p'b' + p''b'' &= 0 \\ pc + p'c' + p''c'' &= 0; \end{aligned}$$

aus diesen drei Gleichungen bestimmen sich p, p', p'' eindeutig, da ja ihr Koeffizientensystem lauter Unbestimmte enthält.

Das hier auftretende Koeffizientensystem

(5) $$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{pmatrix}$$

geht aus dem der ursprünglichen Gleichungen

(5a) $$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

offenbar dadurch hervor, daß man in ihm die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen vertauscht; man nennt daher dasselbe das transponierte

System des ursprünglichen (vergl. S. 45 unten). Die Lösung jener drei Gleichungen kann dann folgendermaſsen geschrieben werden

$$(6)\qquad p = \frac{\varphi(a, b, c)}{\Theta(a, a', a'')},\quad p' = \frac{\varphi'(a, b, c)}{\Theta(a, a', a'')},\quad p'' = \frac{\varphi''(a, b, c)}{\Theta(a, a', a'')},$$

wo der gemeinsame Nenner jetzt die Funktion Θ von dem transponierten Systeme (5) ist.

Setzt man nun für (p, p', p'') die hier gefundenen Werte ein, so geht die Gleichung $F = 0$ offenbar über in

$$x - (p d + p' d' + p'' d'') = 0,$$

und man erhält für x den folgenden Wert

$$(7)\qquad x = \frac{d\varphi + d'\varphi' + d''\varphi''}{\Theta(a, a', a'')}.$$

Da aber vorher für x die Lösung gefunden war

$$x = -\frac{\Theta(d, b, c)}{\Theta(a, b, c)},$$

und da diese die reduzierte Form hatte, so muſs der Nenner des Bruches (7) durch $\Theta(a, b, c)$ teilbar sein, d. h. es besteht eine Identität

$$\Theta(a, a', a'') = \Theta(a, b, c)\cdot k(a, b, c),$$

wo $k(a, b, c)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von a, b, c sein muſs. Vertauscht man aber hier nochmals die Horizontal- und Vertikalreihen miteinander, so ergibt sich

$$\Theta(a, b, c) = \Theta(a, a', a'')\cdot k(a, a', a'');$$

und wenn man diesen Wert von $\Theta(a, b, c)$ aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzt und mit der nicht verschwindenden Gröſse $\Theta(a, a', a'')$ dividiert, so muſs sein

$$k(a, b, c)\cdot k(a, a', a'') = 1.$$

Hieraus folgt, daſs k notwendig gleich ± 1 sein muſs; denn da das Produkt jener beiden ganzen ganzzahligen Funktionen gleich eins sein soll, so müſste jeder Teiler von k, auch jeder Zahlenteiler, ein Teiler der Einheit sein. Also ist

$$(8)\qquad \Theta\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{pmatrix} = \varepsilon\,\Theta\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist.

Es ist leicht, die Bestimmung dieses Vorzeichens durch Ausrechnung zu finden. Die folgende Überlegung zeigt aber ohne jede Rechnung, daſs stets das positive Vorzeichen zu wählen ist.

Ersetzt man nämlich in (8) das System (a, b, c) durch ein sogenanntes symmetrisches System

$$\begin{pmatrix} A, & D, & F \\ D, & B, & E \\ F, & E, & C \end{pmatrix},$$

d. h. durch ein solches, dessen Horizontalreihen seinen entsprechenden Vertikalreihen gleich sind, so ist das transponierte System dem ursprünglichen gleich, und die Gleichung (8) geht über in

$$\Theta\begin{pmatrix} A, & D, & F \\ D, & B, & E \\ F, & E, & C \end{pmatrix} = \varepsilon\,\Theta\begin{pmatrix} A, & D, & F \\ D, & B, & E \\ F, & E, & C \end{pmatrix}.$$

Es mufs also $\varepsilon = +1$ sein, es sei denn, dafs die Funktion Θ für jedes symmetrische Elementensystem identisch verschwindet. Im nächsten Abschnitt (auf S. 133) werden wir aber zeigen, dafs die Funktion Θ von Null verschieden sein mufs, wenn man (a, b, c) gleich dem sogenannten Einheitssysteme $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ setzt; und da dies offenbar symmetrisch ist, so ist damit bewiesen, dafs $\Theta(a, b, c) = \Theta(a, a', a'')$ ist, und man hat den Satz:

Die Funktion Θ bleibt ungeändert, wenn man in ihrem Elementensysteme die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht.

Spricht man jetzt die vorher gefundenen Sätze für die Funktion $\Theta(a, a', a'')$ aus, so gelten sie nach (8) auch für die ursprüngliche Funktion $\Theta(a, b, c)$; da aber die Vertikalreihen des ersten Systemes die Horizontalreihen des letzten sind, so ergibt sich, dafs alle vorher in Bezug auf die Kolonnen ihres Elementensystemes gefundenen Eigenschaften der Funktion Θ wörtlich auch für die Zeilen desselben gelten. Bezeichnet man also wiederum eine Zeile oder eine Kolonne mit dem gemeinsamen Ausdruck „Reihe“, so kann man das vollständige Resultat dieser Untersuchung folgendermafsen aussprechen:

Die Funktion Θ ist eine ganze Funktion der neun Argumente $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$, deren ganzzahlige Koeffizienten keinen gemeinsamen Zahlenfaktor haben; dieselbe ist homogen und linear in Bezug auf die Elemente einer jeden Reihe, und sie ändert nur ihr Vorzeichen, wenn zwei Parallelreihen miteinander vertauscht werden.

§ 6.

Ebenso wie für die Determinanten zweiter Ordnung besteht auch für die hier untersuchte Funktion $\Theta(a, b, c)$, welche, wie gleich gezeigt werden wird, mit der Determinante dritter Ordnung $|a, b, c|$ völlig identisch ist, ein sogenanntes Multiplikationstheorem, durch welches der Wert jener Funktion Θ für ein sogenanntes „komponiertes" System angegeben wird. Zunächst soll auch bei den Systemen von neun Elementen der Begriff der Komposition kurz erörtert werden.

Sind zwei Systeme von je neun Elementen

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

gegeben, so wollen wir auch hier das System betrachten, dessen Elemente entstehen, wenn man die Elemente je einer Zeile von $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ mit den entsprechenden Elementen je einer Kolonne von (a, b, c) multipliziert und die Produkte addiert. Das so entstehende System wollen wir aus $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ und (a, b, c) (in dieser Reihenfolge) komponiert nennen und diese Bezeichnung durch die Gleichung

$$\tag{1} \begin{gathered} \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'', & \alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'', & \alpha c + \alpha' c' + \alpha'' c'' \\ \beta a + \beta' a' + \beta'' a'', & \beta b + \beta' b' + \beta'' b'', & \beta c + \beta' c' + \beta'' c'' \\ \gamma a + \gamma' a' + \gamma'' a'', & \gamma b + \gamma' b' + \gamma'' b'', & \gamma c + \gamma' c' + \gamma'' c'' \end{pmatrix} \end{gathered}$$

ausdrücken. Wir werden sofort sehen, daſs es allein diese Art von Komposition ist, welche in den Anwendungen vorkommt, und deshalb soll sie allein im folgenden berücksichtigt werden.

Zunächst soll aber noch eine Erweiterung des Begriffes der Komposition gegeben werden, welche im folgenden viel benützt wird. Komponiert man nämlich genau in der oben angegebenen Weise das System $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ mit einer Matrix

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a', & b', & c', & d' \\ a'', & b'', & c'', & d'' \end{pmatrix}$$

von drei Zeilen und vier Kolonnen, so erhält man als Kompositionsresultat wiederum eine Matrix von zwölf Elementen, und auch sie

wollen wir als das Resultat der Komposition des Systemes $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ mit der Matrix (a, b, c, d) betrachten, und diesen Zusammenhang wie in (1) durch die Gleichung

$$(2)\qquad \begin{gathered}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''\\ \beta, & \beta', & \beta''\\ \gamma, & \gamma', & \gamma''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b, & c, & d\\ a', & b', & c', & d'\\ a'', & b'', & c'', & d''\end{pmatrix}\\ =\begin{pmatrix}\alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a'', & \alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b'', & \alpha c+\alpha' c'+\alpha'' c'', & \alpha d+\alpha' d'+\alpha'' d''\\ \beta a+\beta' a'+\beta'' a'', & \beta b+\beta b'+\beta'' b'', & \beta c+\beta' c'+\beta'' c'', & \beta d+\beta' d'+\beta'' d''\\ \gamma a+\gamma' a'+\gamma' a'', & \gamma b+\gamma' b'+\gamma'' b'', & \gamma c+\gamma' c'+\gamma'' c'', & \gamma d+\gamma' d'+\gamma'' d''\end{pmatrix}\end{gathered}$$

bezeichnen. Es mag gleich hier hervorgehoben werden, daſs die Elemente einer und derselben Kolonne der Matrix (a, b, c, d) und der komponierten Matrix dieselben Elemente enthalten; so enthält die erste Kolonne des komponierten Systemes nur (a, a', a''), die zweite (b, b', b'') u. s. w.

Wir gehen nun aus von dem Gleichungssysteme

$$(3)\qquad \begin{aligned} f\; &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\\ f' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0\\ f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{aligned}$$

dessen einzige Lösung für unbestimmte Koeffizienten (a, b, c, d) wir in der Form schreiben konnten

$$(3\text{a})\qquad x = -\frac{\Theta(b, c, d)}{\Theta(a, b, c)},\quad y = +\frac{\Theta(c, d, a)}{\Theta(a, b, c)},\quad z = -\frac{\Theta(d, a, b)}{\Theta(a, b, c)}.$$

Leiten wir nun aus diesem ein neues Gleichungssystem ab

$$(4)\qquad \begin{aligned} F\; &= \alpha f + \alpha' f' + \alpha'' f'' = 0\\ F' &= \beta f + \beta' f' + \beta'' f'' = 0\\ F'' &= \gamma f + \gamma' f' + \gamma'' f'' = 0, \end{aligned}$$

so ist leicht zu zeigen, daſs unter unseren allgemeinen Voraussetzungen die beiden Gleichungssysteme (3) und (4) genau dieselbe Lösung besitzen, d. h. daſs sie äquivalent sind, falls das Koeffizientensystem $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ aus lauter unbestimmten Konstanten besteht.

Betrachtet man nämlich in den Gleichungen (4) zunächst (f, f', f'') als Unbekannte, so besitzen sie nach dem Korollare auf S. 117 unten die eine und nur die eine Lösung $f = 0,\ f' = 0,\ f'' = 0$, d. h. jene beiden Gleichungssysteme (3) und (4) sind einander äquivalent.

Löst man also die drei Gleichungen $(F = 0,\ F' = 0,\ F'' = 0)$ direkt nach x, y, z auf, so können sich die so gefundenen Werte nur der Form nach von den in (3a) angegebenen unterscheiden.

Ordnet man nun die linearen Gleichungen (4) nach den Unbekannten x, y, z, so möge man erhalten

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
F &= \alpha f + \alpha' f' + \alpha'' f'' = A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\\
F' &= \beta f + \beta' f' + \beta'' f'' = A' x + B' y + C' z + D' = 0\\
F'' &= \gamma f + \gamma' f' + \gamma'' f'' = A'' x + B'' y + C'' z + D'' = 0.
\end{aligned}
$$

Man erkennt dann ohne weiteres, daſs das neue Koeffizientensystem (A, B, C, D) dadurch aus dem alten (a, b, c, d) hervorgeht, daſs man es vorn mit dem Systeme $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ komponiert; es besteht also die Gleichung

$$
(5\text{a})\qquad
\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a', & b', & c', & d' \\ a'', & b'', & c'', & d'' \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} A, & B, & C, & D \\ A', & B', & C', & D' \\ A'', & B'', & C'', & D'' \end{pmatrix};
$$

und aus der oben über die Komposition gemachten Bemerkung geht hervor, daſs die Elemente (A, A', A'') nur (a, a', a'') enthalten, aber von den Elementen (b, c, d) unabhängig sind; das Entsprechende gilt von den übrigen Kolonnen der komponierten Matrix. Setzt man nun die aus (5) sich ergebenden Werte der Unbekannten

$$
(5\text{b})\qquad x = -\frac{\Theta(B, C, D)}{\Theta(A, B, C)},\quad y = +\frac{\Theta(C, D, A)}{\Theta(A, B, C)},\quad z = -\frac{\Theta(D, A, B)}{\Theta(A, B, C)}
$$

gleich den in (3a) gefundenen Ausdrücken, so kann das Resultat offenbar folgendermaſsen geschrieben werden

$$
(6)\qquad \frac{\Theta(A, B, C)}{\Theta(a, b, c)} = \frac{\Theta(B, C, D)}{\Theta(b, c, d)} = \frac{\Theta(C, D, A)}{\Theta(c, d, a)} = \frac{\Theta(D, A, B)}{\Theta(d, a, b)}.
$$

Der gemeinsame Wert dieser vier Quotienten ist nun von den Elementen des Koeffizientensystemes (a, b, c, d) völlig unabhängig; denn in dem ersten Quotient kommen die Elemente (d, d', d''), im zweiten (a, a', a''), im dritten (b, b', b'') und im vierten endlich die Elemente (c, c', c'') gar nicht vor. Dieser Quotient hängt also nur von den neun Elementen $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ ab.

Handelt es sich also darum, den Wert des ersten Bruches in (6) zu bestimmen, so kann man (a, b, c) ganz beliebig spezialisieren. Es war nun (A, B, C) das Kompositionsresultat aus $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ und (a, b, c); es ist nämlich

$$
\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{pmatrix}.
$$

Wählen wir nun speziell

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

so geht offenbar (A, B, C) über in

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet man also das in (7) eingeführte „Einheitssystem" kurz durch E, so wird jener Quotient gleich $\frac{\Theta(\alpha, \alpha', \alpha'')}{\Theta(E)}$, und da dies nach dem vorangegangenen Beweise auch der Wert des Quotienten $\frac{\Theta(A, B, C)}{\Theta(a, b, c)}$ ist, so ergibt sich die wichtige Identität

$$(8)\qquad \frac{\Theta(A, B, C)}{\Theta(a, b, c)} = \frac{\Theta(\alpha, \alpha', \alpha'')}{\Theta(E)}.$$

In dieser Gleichung sind nun nach der allgemeinen Voraussetzung $\Theta(a, b, c)$ und $\Theta(\alpha, \alpha', \alpha'')$ beide nicht identisch Null; folglich kann auch $\Theta(E)$ nicht identisch verschwinden, sondern es ist notwendig

$$(9)\qquad \Theta\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \gtrless 0.$$

Multipliziert man also in (8) mit den Nennern herauf, so ergibt sich

$$(10)\qquad \Theta(A, B, C)\,\Theta(E) = \Theta(\alpha, \alpha', \alpha'')\,\Theta(a, b, c).$$

Die rechte Seite dieser Identität enthält keine Zahlenfaktoren; dasselbe muſs demnach auch von der linken Seite und speziell von der ganzen Zahl $\Theta(E)$ gelten; es muſs demnach $\Theta(E) = \pm 1$ sein. Welchen von diesen beiden Werten wir wählen, ist gleichgültig. Wir wollen stets

$$(11)\qquad \Theta(E) = +1$$

annehmen.

Da das Argumentensystem (A, B, C) aus den beiden $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ und (a, b, c) komponiert ist, so kann man nunmehr der Gleichung (10) die folgende Form geben

$$(12)\qquad \Theta\left(\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\right) = \Theta\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} \Theta\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix},$$

d. h. die Funktion Θ eines komponierten Systemes ist gleich dem Produkte der Θ-Funktionen ihrer Komponenten.

An dieser Stelle mag noch bemerkt werden, daſs durch die Gleichung (11) der auf S. 129 antizipierte Nachweis erbracht ist, daſs $\Theta(E)$ notwendig von Null verschieden ist.

§ 7.

Den im vorigen Paragraphen hergeleiteten Multiplikationssatz für die Funktion Θ erhält man auch, wenn man wieder, anstatt das Gleichungssystem

$$f = ax + by + cz + d = 0 \tag{1}$$

durch ein äquivalentes zu ersetzen, die Unbekannten (x, y, z) durch andere ersetzt, welche aus ihnen durch eine lineare Transformation

$$\begin{aligned} x &= \lambda\ \xi + \mu\ \eta + \nu\ \zeta \\ y &= \lambda'\xi + \mu'\eta + \nu'\zeta \\ z &= \lambda''\xi + \mu''\eta + \nu''\zeta \end{aligned} \tag{2}$$

hervorgehen. Setzt man nämlich diese Werte für x, y, z in die obigen Gleichungen ein und ordnet sie nach (ξ, η, ζ), so erhält man ein neues Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varphi\ &= A\ \xi + B\ \eta + C\ \zeta + d\ = 0 \\ \varphi' &= A'\xi + B'\eta + C'\zeta + d' = 0 \\ \varphi'' &= A''\xi + B''\eta + C''\zeta + d'' = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

in welchem die konstanten Glieder wieder (d, d', d'') sind, während das Koeffizientensystem (A, B, C) von (ξ, η, ζ), wie man sofort erkennt, aus dem Koeffizientensysteme (a, b, c) von (x, y, z) dadurch hervorgeht, daſs man dieses hinten mit dem Substitutionssysteme (λ, μ, ν) komponiert. Es ist also

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Die Gleichungen (2) lehren wieder, daſs der Lösung

$$x = -\frac{\Theta(b, c, d)}{\Theta(a, b, c)}, \quad y = +\frac{\Theta(c, d, a)}{\Theta(a, b, c)}, \quad z = -\frac{\Theta(d, a, b)}{\Theta(a, b, c)} \tag{5}$$

für unbestimmte Werte der Substitutionskoeffizienten (λ, μ, ν) ein und nur ein Wertsystem (ξ, η, ζ) entspricht. Löst man nun das Gleichungssystem (3) direkt auf, so können die Werte

$$\xi = -\frac{\Theta(B, C, d)}{\Theta(A, B, C)}, \quad \eta = \frac{\Theta(C, d, A)}{\Theta(A, B, C)}, \quad \zeta = -\frac{\Theta(d, A, B)}{\Theta(A, B, C)} \tag{6}$$

nicht identisch Null sein, weil sonst dasselbe für jedes spezielle Substitutionssystem (λ, μ, ν), also auch für $(\lambda, \mu, \nu) = (E)$ der Fall sein müſste; und das kann nicht sein, weil dann einfach $(x = \xi,\ y = \eta,\ z = \zeta)$ wird. Anderseits hängen aber die Lösungen (5) und (6) durch die

Gleichungen (2) zusammen. Setzt man also diese Werte speziell in die erste jener Gleichungen ein, so folgt

$$(7) \qquad -\frac{\Theta(b, c, d)}{\Theta(a, b, c)} = \frac{-\lambda\Theta(B, C, d) + \mu\Theta(C, d, A) - \nu\Theta(d, A, B)}{\Theta(A, B, C)}.$$

Da aber der links stehende Bruch in der reduzierten Form erscheint, so mufs der Nenner des auf der rechten Seite stehenden Bruches durch den linken Nenner teilbar sein; ferner ist die Funktion $\Theta(a, b, c)$ in Bezug auf (a, b, c) homogen und von der dritten Dimension, und dasselbe gilt von $\Theta(A, B, C)$, weil Θ lauter Terme von der Form ABC enthält, und jeder dieser Faktoren wieder in den (a, b, c) homogen und linear ist. Bildet man also den Quotienten $\frac{\Theta(A, B, C)}{\Theta(a, b, c)}$, so ist derselbe ganz unabhängig von (a, b, c); berücksichtigt man also die Gleichung (4), so mufs eine Gleichung von der Form bestehen

$$\frac{\Theta\big((a, b, c)(\lambda, \mu, \nu)\big)}{\Theta(a, b, c)} = G(\lambda, \mu, \nu),$$

wo G eine noch zu bestimmende ganze ganzzahlige Funktion von (λ, μ, ν) ist. Um diese zu finden, wählen wir jetzt für (a, b, c) das Einheitssystem E, und da offenbar wieder

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}$$

und $\Theta(E) = 1$ ist, so geht unsere Gleichung über in

$$\Theta(\lambda, \mu, \nu) = G(\lambda, \mu, \nu).$$

Hieraus ergibt sich also die Identität

$$\Theta\big((a, b, c)(\lambda, \mu, \nu)\big) = \Theta(a, b, c) \cdot \Theta(\lambda, \mu, \nu),$$

d. h. wiederum der Multiplikationssatz.

Die hier gefundenen Eigenschaften der Funktion

$$\Theta\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

geben uns nun das Mittel, diese Funktion wirklich darzustellen und den Nachweis zu führen, dafs sie mit der Determinante $|a, b, c|$ übereinstimmt.

Da nämlich Θ eine ganze ganzzahlige Funktion der neun Elemente des Systemes (a, b, c) ist, welche homogen und linear in den Elementen jeder Kolonne und jeder Zeile ist, so enthält jeder Term von Θ lauter verschiedene Buchstaben und lauter verschiedene obere Indizes; es mufs Θ daher die folgende Form haben

$$\Theta(a, b, c) = A_1 ab'c'' + A_2 bc'a'' + A_3 ca'b'' \tag{8}$$
$$+ A_4 a''b'c + A_5 b''c'a + A_6 c''a'b,$$

wo die Koeffizienten $A_1, \ldots A_6$ noch zu bestimmende ganze Zahlen sind. Da nun durch zweimalige Kolonnenvertauschung die Gleichung erhalten wird

$$\Theta(a, b, c) = \Theta(b, c, a),$$

so erkennt man, daſs die rechte Seite von (8) bei cyklischer Vertauschung der Buchstaben (a, b, c) ungeändert bleiben muſs; und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$A_1 = A_2 = A_3 \quad \text{und} \quad A_4 = A_5 = A_6,$$

wenn also

$$\Theta(a, b, c) = A_1(ab'c'' + bc'a'' + ca'b'')$$
$$+ A_4(a''b'c + b''c'a + c''a'b)$$

ist. Und endlich folgt aus der Bedingung

$$\Theta(a, b, c) = -\Theta(a, c, b),$$

daſs

$$A_1 = -A_4 = A$$

sein muſs. Es ist also

$$\Theta(a, b, c) = A\,|a, b, c|,$$

wo $|a, b, c|$ die im § 2 der vorigen Vorlesung eingeführte Determinante bezeichnet, d. h. durch jene Bedingungen wird die Funktion Θ bis auf eine multiplikative Konstante völlig bestimmt. Da Θ endlich keinen ganzzahligen Teiler haben soll, so muſs $A = \pm 1$ sein. Wir wollen $A = +1$ annehmen. Offenbar fällt diese letzte Festsetzung mit der auf S. 133 aufgestellten Forderung zusammen, daſs

$$\Theta\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = 1$$

sein soll; in dieser Form wollen wir diese letzte Bestimmung der Funktion Θ aussprechen. Dann ist also

$$\Theta(a, b, c) = |a, b, c|,$$

und die Lösung unserer Gleichungen ($f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$) wird dann dieselbe, welche wir in der vorigen Vorlesung gefunden hatten, und von der wir uns durch einfache Substitution überzeugten, daſs sie die vorgelegten Gleichungen wirklich befriedigt. Wir sehen hiernach, daſs die von uns vorher eingeführte Voraussetzung berechtigt ist, daſs jenes Gleichungssystem für unbestimmte (a, b, c, d) wirklich mindestens eine rationale Lösung besitzt; und daher gelten alle über die Funktion Θ gefundenen Sätze auch wirklich für die Determinanten, mit denen sie vollkommen übereinstimmen, weil jene Sätze nur aus jener einzigen soeben als richtig erwiesenen Voraussetzung abgeleitet waren.

Neunte Vorlesung.

Theorie der Systeme von neun Elementen. — Die Einheitssysteme und die Diagonalsysteme. — Die reziproken und die adjungierten Systeme; ihre Haupteigenschaften. — Die Dekomposition der Systeme. — Die elementaren Systeme erster Art und ihre Eigenschaften. — Dekomposition eines Systemes in Elementarsysteme erster Art. — Die Elementarsysteme zweiter Art. — Zerlegung eines Systemes in Elementarsysteme zweiter Art. — Anwendungen: Die Determinante als Invariante für die Reihenfolge der Komposition. — Die charakteristischen Eigenschaften der Determinante.

§ 1.

Der in der vorigen Vorlesung bewiesene Multiplikationssatz für die Determinanten dritter Ordnung, welche ja mit den Funktionen Θ absolut identisch sind, bietet auch hier ein Mittel zur systematischen Untersuchung der Systeme von neun Elementen, ihrer Zerlegung in Elementarsysteme und zu ihrer Einteilung in Klassen auf Grund von Äquivalenzbedingungen. Wir können und wollen hier die in der vierten Vorlesung angegebenen Bezeichnungen und Resultate für diese Untersuchungen gleich benützen.

Betrachtet man zwei Systeme von neun Elementen

$$S = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}, \tag{1}$$

so soll wieder unter ST das aus S und T komponierte System verstanden werden. In diesem symbolischen Produkte sind die Faktoren im allgemeinen nicht vertauschbar; dagegen zeigt man leicht z. B. durch wirkliche Ausrechnung, daſs auch hier bei den Kompositionen von drei und mehr Systemen das sogenannte assoziative Gesetz gilt, daſs nämlich

$$V = (ST)\,U = S(TU) = STU \tag{2}$$

ist; und aus dem Multiplikationssatz ergibt sich, wenn man in (2) von den Systemen zu ihren Determinanten übergeht, die Gleichung

$$|V| = |ST| \cdot |U| = |S|\,|T|\,|U|. \tag{3}$$

Das einfachste System ist dasjenige, welches schon auf S. 129 benützt und dort als Einheitssystem bezeichnet wurde, nämlich das System

(4) $$E = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Dasselbe hat mit der Zahl eins die charakteristische Eigenschaft gemein, daſs jedes beliebige System durch die Komposition mit E nicht geändert wird, d. h. daſs

(5) $$SE = ES = S$$

ist; man erkennt leicht, daſs durch diese Eigenschaft das Einheitssystem eindeutig bestimmt ist. Seine Determinante ist gleich eins.

Dem Einheitssysteme am nächsten stehen die sogenannten Diagonalsysteme, d. h. diejenigen, welche auſserhalb der Diagonale lauter Nullen enthalten, welche also die Form

$$(d) = \begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ 0, & d', & 0 \\ 0, & 0, & d'' \end{pmatrix}$$

besitzen.

Sind

$$(d) = \begin{pmatrix} d, & 0, & 0 \\ 0, & d', & 0 \\ 0, & 0, & d'' \end{pmatrix}, \quad (e) = \begin{pmatrix} e, & 0, & 0 \\ 0, & e', & 0 \\ 0, & 0, & e'' \end{pmatrix}$$

zwei solche Diagonalsysteme, so ist ihr Produkt

$$(d)(e) = (e)(d) = (de) = \begin{pmatrix} de, & 0, & 0 \\ 0, & d'e', & 0 \\ 0, & 0, & d''e'' \end{pmatrix},$$

und hieraus folgt speziell

$$(d)^m = (d^m).$$

Wir wollen auch hier untersuchen, wie ein System S beschaffen sein muſs, damit ein zu ihm „reziprokes" System R existiert, d. h. ein solches, welches, mit S komponiert, das Einheitssystem ergibt. Damit die Gleichung

(6) $$RS = E$$

überhaupt bestehen kann, ist notwendig, daſs die Determinante $|S|$ von Null verschieden sei; denn geht man in (6) zu den Determinanten über, so folgt

(6a) $$|R|\,|S| = 1.$$

Ist nun $|S| \gtrless 0$, so existiert stets ein und nur ein zu S reziprokes System. Ist nämlich

$$R = \begin{pmatrix} p, & p', & p'' \\ q, & q', & q'' \\ r, & r', & r'' \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix},$$

so ist die Forderung

$$\begin{pmatrix} p, & p', & p'' \\ q, & q', & q'' \\ r, & r', & r'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

gleichbedeutend mit den folgenden drei Systemen von Bedingungsgleichungen für die neun unbekannten Elemente von R

$$\begin{array}{lll} ap + a'p' + a''p'' = 1, & aq + a'q' + a''q'' = 0, & ar + a'r' + a''r'' = 0 \\ bp + b'p' + b''p'' = 0, & bq + b'q' + b''q'' = 1, & br + b'r' + b''r'' = 0 \\ cp + c'p' + c''p'' = 0, & cq + c'q' + c''q'' = 0, & cr + c'r' + c''r'' = 1. \end{array} \tag{7}$$

Nur das erste dieser Gleichungssysteme braucht aufgelöst zu werden, da das zweite und dritte aus jenem hervorgeht, wenn man die Buchstaben (a, b, c) und zugleich (p, q, r) cyklisch vertauscht. Nun ergibt sich aber aus den beiden letzten homogenen Gleichungen für p, p', p'' die Lösung

$$p = t \begin{vmatrix} b', & b'' \\ c', & c'' \end{vmatrix}, \quad p' = t \begin{vmatrix} b'', & b \\ c'', & c \end{vmatrix}, \quad p'' = t \begin{vmatrix} b, & b' \\ c, & c' \end{vmatrix}, \tag{7a}$$

wo t noch aus der ersten Gleichung zu bestimmen ist. Ersetzt man aber in ihr die Größen p, p', p'' durch ihre Werte (7a), so erhält man

$$t\left(a \begin{vmatrix} b', & b'' \\ c', & c'' \end{vmatrix} + a' \begin{vmatrix} b'', & b \\ c'', & c \end{vmatrix} + a'' \begin{vmatrix} b, & b' \\ c, & c' \end{vmatrix}\right) = 1,$$

und da der Koeffizient von t gleich der Determinante $D = |a, b, c|$ von S ist, so ergibt sich $t = \frac{1}{|a, b, c|}$.

Damit sind (p, p', p'') eindeutig bestimmt; und da die anderen Lösungen aus dieser durch cyklische Vertauschungen hervorgehen, so erhält man die folgende Darstellung des zu S reziproken Systemes

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b', & b'' \\ c', & c'' \end{vmatrix}, & \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b'', & b \\ c'', & c \end{vmatrix}, & \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b, & b' \\ c, & c' \end{vmatrix} \\ \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c', & c'' \\ a', & a'' \end{vmatrix}, & \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c'', & c \\ a'', & a \end{vmatrix}, & \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c, & c' \\ a, & a' \end{vmatrix} \\ \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a', & a'' \\ b', & b'' \end{vmatrix}, & \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a'', & a \\ b'', & b \end{vmatrix}, & \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Zu jedem Systeme S von nicht verschwindender Determinante existiert also ein und nur ein reziprokes System R. Seine Elemente sind sämtlich Determinanten zweiter Ordnung, dividiert durch die ganze

Determinante; und zwar sind jene neun Zähler die sämtlichen neun Determinanten zweiter Ordnung, welche man aus dem Koeffizientensysteme von

$$S = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

durch Fortlassung je einer Zeile und einer Kolonne bilden kann. Man erhält allgemein den Zähler desjenigen Elementes von R, welches in der i^{ten} Zeile und der k^{ten} Kolonne steht, dadurch, dafs man in S die k^{te} Zeile und die i^{te} Kolonne fortläfst und aus den übrigbleibenden vier Elementen die Determinante zweiter Ordnung bildet. Durch diese Angabe sind die Elemente von R bis auf ihre Vorzeichen gegeben, wir werden auch diese im allgemeinen Falle durch eine einfache Vorschrift bestimmen.

Hier erhält man eine leichtere vollständige Vorzeichenbestimmung durch die folgende Überlegung: Ersetzt man in denjenigen Gleichungen (7), deren rechte Seiten gleich eins sind, die neun Unbekannten durch ihre Werte aus (8) und multipliziert dann mit dem gemeinsamen Nenner, so ergeben sich die Identitäten

$$\begin{aligned} a\begin{vmatrix} b', & b'' \\ c', & c'' \end{vmatrix} + a'\begin{vmatrix} b'', & b \\ c'', & c \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b, & b' \\ c, & c' \end{vmatrix} &= D \\ b\begin{vmatrix} c', & c'' \\ a', & a'' \end{vmatrix} + b'\begin{vmatrix} c'', & c \\ a'', & a \end{vmatrix} + b''\begin{vmatrix} c, & c' \\ a, & a' \end{vmatrix} &= D \\ c\begin{vmatrix} a', & a'' \\ b', & b'' \end{vmatrix} + c'\begin{vmatrix} a'', & a \\ b'', & b \end{vmatrix} + c''\begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix} &= D. \end{aligned} \tag{9}$$

Es sind also die gesuchten Zähler der Elemente von R nichts anderes als die Entwickelungskoeffizienten von D nach den Elementen ihrer ersten, zweiten und dritten Horizontalreihe, oder, was dasselbe ist, jede dieser neun Determinanten ist der Koeffizient eines der Elemente in der Entwickelung der Determinante D. Man nennt diese neun Determinanten zweiter Ordnung, welche man aus den Elementen der Determinante D bilden kann, Unterdeterminanten von D, auch Subdeterminanten oder Partialdeterminanten. Und speziell bezeichnet man den Koeffizienten eines bestimmten Elementes in der Entwickelung von D als die diesem Koeffizienten adjungierte Unterdeterminante oder seine Adjunkte. So ist z. B. $\begin{vmatrix} c', & c'' \\ a', & a'' \end{vmatrix}$ die Adjunkte des Elementes b, die Determinante $\begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix}$ die Adjunkte von c'' u. s. w.; man bezeichnet diese Beziehungen kurz durch die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} c', & c'' \\ a', & a'' \end{vmatrix} = \operatorname{adj} b, \quad \begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix} = \operatorname{adj} c.$$

Dann kann man das zu S reziproke System auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} \frac{\operatorname{adj} a}{D}, & \frac{\operatorname{adj} a'}{D}, & \frac{\operatorname{adj} a''}{D} \\ \frac{\operatorname{adj} b}{D}, & \frac{\operatorname{adj} b'}{D}, & \frac{\operatorname{adj} b''}{D} \\ \frac{\operatorname{adj} c}{D}, & \frac{\operatorname{adj} c'}{D}, & \frac{\operatorname{adj} c''}{D} \end{pmatrix}.$$

Abgesehen von dem gemeinsamen Nenner D sind also die Elemente der Horizontalreihen von R die Adjunkten der Elemente der entsprechenden Vertikalreihen von S.

Aus der Natur der adjungierten Unterdeterminanten ergibt sich aber noch eine andere Schreibweise derselben. Faßt man nämlich die Elemente von S als Variable auf, so erhält man offenbar durch partielle Differentiation der ersten Gleichung (9) nach (a, a', a'')

$$\operatorname{adj} a = \begin{vmatrix} b', & b'' \\ c', & c'' \end{vmatrix} = \frac{\partial D}{\partial a}, \quad \operatorname{adj} a' = \begin{vmatrix} b'', & b \\ c'', & c \end{vmatrix} = \frac{\partial D}{\partial a'}, \quad \operatorname{adj} a'' = \begin{vmatrix} b, & b' \\ c, & c' \end{vmatrix} = \frac{\partial D}{\partial a''},$$

und entsprechende Gleichungen gelten für die anderen sechs Zähler. Hiernach ist $p = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial a} = \frac{\partial \, . lD}{\partial a}$ u. s. w., wenn lD den natürlichen Logarithmus von D bezeichnet; und da entsprechende Gleichungen für die übrigen Elemente von R gelten, so erhält man auch die folgende Darstellung des zu S reziproken Systemes

$$(10) \qquad R = \begin{pmatrix} \frac{\partial lD}{\partial a}, & \frac{\partial lD}{\partial a'}, & \frac{\partial lD}{\partial a''} \\ \frac{\partial lD}{\partial b}, & \frac{\partial lD}{\partial b'}, & \frac{\partial lD}{\partial b''} \\ \frac{\partial lD}{\partial c}, & \frac{\partial lD}{\partial c'}, & \frac{\partial lD}{\partial c''} \end{pmatrix}.$$

Wir hatten das zu S reziproke System zunächst einseitig durch die Gleichung $RS = E$ definiert. Es ist aber leicht zu zeigen, daß diese Systeme vertauschbar sind, und hierdurch erst wird der Name „reziprokes System" gerechtfertigt.

Es sei nämlich Q das reziproke System zu R, d. h. das System, für welches

$$QR = E$$

ist. Komponiert man nun beide Seiten dieser Gleichung hinten mit dem Systeme S, so erhält man

$$QRS = Q(RS) = QE = ES = S;$$

es ist also

$$Q = S.$$

Das reziproke System Q des reziproken Systemes R von S ist also das ursprüngliche System S.

Oder das zu S reziproke System R ist mit S vertauschbar, denn es ist

$$RS = SR = E. \tag{10a}$$

Man kann demnach das reziproke System zu S als dasjenige definieren, welches mit S in irgend einer Reihenfolge komponiert das Einheitssystem ergibt.

Geht man in der Definitionsgleichung (10a) von R zu den Determinanten über, so ergibt sich

$$|R| = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{D}.$$

Die Determinante des reziproken Systemes ist das Reziproke der Determinante des ursprünglichen Systemes.

Sind P_1 und Q_1 die zu P und Q reziproken Systeme, so ist das zu PQ reziproke System gleich $Q_1 P_1$, denn es ist

$$(Q_1 P_1)(PQ) = Q_1(P_1 P)\,Q = Q_1 E Q = E,$$

und das Entsprechende gilt für mehr als zwei Systeme. Man hat also den Satz:

Das reziproke System zu einem aus zwei oder mehreren anderen komponierten Systeme entsteht durch Komposition der Reziproken in umgekehrter Reihenfolge.

Dem reziproken Systeme sehr nahe steht das sogenannte **adjungierte System**

$$A = \begin{pmatrix} |b', b''|, & |b'', b|, & |b, b'| \\ |c', c''|, & |c'', c|, & |c, c'| \\ |a', a''|, & |a'', a|, & |a, a'| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{adj} a, & \operatorname{adj} a', & \operatorname{adj} a'' \\ \operatorname{adj} b, & \operatorname{adj} b', & \operatorname{adj} b'' \\ \operatorname{adj} c, & \operatorname{adj} c', & \operatorname{adj} c'' \end{pmatrix}, \tag{11}$$

welches direkt aus den adjungierten Unterdeterminanten gebildet ist. Dasselbe geht aus dem Reziproken dadurch hervor, daſs man jedes seiner Elemente mit der Determinante D multipliziert, oder, was offenbar dasselbe ist, indem man jenes System mit dem Diagonalsysteme

$$(D) = \begin{pmatrix} D, & 0, & 0 \\ 0, & D, & 0 \\ 0, & 0, & D \end{pmatrix}$$

vorn oder hinten komponiert. Es ist also

$$A = (D)\,R = R\,(D) \tag{12}$$

die Gleichung, durch die das reziproke und das adjungierte System zusammenhängen. Aus den beiden Gleichungen

$$RS = E, \qquad SR = E$$

folgt, indem man die erste vorn, die letzte hinten mit dem Systeme (D) komponiert und (12) berücksichtigt

$$(13) \qquad AS = SA = (D).$$

Das zu S adjungierte System ist also dasjenige, welches, mit S in irgend einer Reihenfolge komponiert, das „zu S gehörige" Diagonalsystem $\begin{pmatrix} D, & 0, & 0 \\ 0, & D, & 0 \\ 0, & 0, & D \end{pmatrix}$ ergibt.

Geht man in der Gleichung (13) zu den Determinanten über und beachtet, daſs die Determinante des Diagonalsystemes (D) offenbar gleich D^3 ist, so ergibt sich $|A|.D = D^3$, oder

$$|A| = \begin{vmatrix} |b', b''|, & |b'', b|, & |b, b'| \\ |c', c''|, & |c'', c|, & |c, c'| \\ |a', a''|, & |a'', a|, & |a, a'| \end{vmatrix} = D^2.$$

Diese merkwürdige Determinantenrelation ist zuerst von *Lagrange* entdeckt worden.

Da sich das reziproke System von dem adjungierten nur durch den Nenner D unterscheidet, so besteht auch für dieses der Satz:

> daſs das adjungierte System eines Produktes mehrerer Systeme gleich dem Produkte aus den adjungierten Systemen der Faktoren, aber in umgekehrter Reihenfolge, ist.

Wir wollen endlich noch versuchen, das adjungierte System zu A, d. h. dasjenige System $\bar{A}$ zu bestimmen, welches, mit A komponiert, das zu A gehörige Diagonalsystem, also das System $\begin{pmatrix} D^2, & 0, & 0 \\ 0, & D^2, & 0 \\ 0, & 0, & D^2 \end{pmatrix}$ ergibt. Es muſs also sein

$$\bar{A}A = (D^2) = (D)(D).$$

Komponiert man aber diese Gleichung hinten mit S und berücksichtigt, daſs $AS = (D)$ ist, so ergibt sich

$$\bar{A}(D) = (D)S(D),$$

oder wenn man auf beiden Seiten hinten mit $(D)^{-1} = \left(\frac{1}{D}\right)$ komponiert,

$$\bar{A} = (D)S = (Da, Db, Dc).$$

D. h. das adjungierte System des zu S adjungierten Systemes entsteht aus dem Systeme S dadurch, daſs man jedes seiner Elemente mit der Determinante multipliziert. Also es ist

$$\begin{pmatrix} \text{adj adj } a, & \text{adj adj } b, & \text{adj adj } c \\ \text{adj adj } a', & \text{adj adj } b', & \text{adj adj } c' \\ \text{adj adj } a'', & \text{adj adj } b'', & \text{adj adj } c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Da, & Db, & Dc \\ Da', & Db', & Dc' \\ Da''; & Db'', & Dc'' \end{pmatrix}.$$

Jede Unterdeterminante des Systemes (11) der Adjungierten ist also gleich der ganzen Determinante multipliziert mit einem Elemente derselben. So ist z. B.

$$\text{adj adj } a = \begin{vmatrix} \text{adj } b', & \text{adj } b'' \\ \text{adj } c', & \text{adj } c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c'', & c \\ a'', & a \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} c, & c' \\ a, & a' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a'', & a \\ b'', & b \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} a, & a' \\ b, & b' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}.$$

Auf diesem Satze beruht die merkwürdige Tatsache, daſs bei der ersten Auflösungsmethode der Gleichungen $f=0,\ f'=0,\ f''=0$ in § 1 der siebenten Vorlesung die Ausdrücke, welche sich für x und y ergaben, im Zähler und Nenner auſser einer Determinante dritter Ordnung beide den überflüssigen Faktor c enthielten.

Komponiert man ein System S r Male mit sich selbst, so soll das Resultat mit S^r bezeichnet werden. Dann besteht für alle positiven ganzzahligen Exponenten r und t die Gleichung

$$S^{r+t} = S^r S^t.$$

Diese Gleichung bleibt auch für negative oder verschwindende Werte der Exponenten bestehen, wenn man wieder

$$S^0 = E$$

setzt und das zu S reziproke System mit S^{-1} bezeichnet; nur muſs dann natürlich die Determinante von S als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Dann ist nämlich (vergl. die Ausführungen auf S. 45)

$$SS^{-1} = S^0 = E, \qquad S^{-a}.S^a = E,$$

wenn $S^{-a} = (S^{-1})^a$ ist. Es ist also auch S^{-a} das reziproke System zu S^a.

Ist $S = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ ein beliebig gegebenes System, so soll das transponierte oder konjugierte System stets durch $\bar{S}$ bezeichnet werden, so daſs also

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{pmatrix}$$

ist. Ein System heifst **symmetrisch**, wenn es seinem konjugierten gleich ist, d. h. wenn seine Horizontalreihen den entsprechenden Vertikalreihen gleich sind.

Sind $S = (a, b, c)$, $T = (\alpha, \alpha', \alpha'')$ zwei beliebige Systeme, so folgt aus der Gleichung

$$(\overline{ST}) = \overline{\left(\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} \alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c, \ldots \\ \alpha'\, a + \beta'\, b + \gamma'\, c, \ldots \\ \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c, \ldots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{pmatrix} = \overline{T}\,\overline{S}$$

der Satz:

> Ist ein System aus mehreren Faktoren zusammengesetzt, so ist das konjugierte System aus den konjugierten Faktoren, aber in umgekehrter Reihenfolge, zusammengesetzt.

Ist S ein beliebiges System von nicht verschwindender Determinante, S^{-1} das reziproke System, und geht man in der Gleichung $S^{-1}S = E$ zu den konjugierten Systemen über, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, da das Einheitssystem symmetrisch ist: $\overline{S}(\overline{S^{-1}}) = E$; da aber anderseits $\overline{S}(\overline{S})^{-1} = E$ ist, so folgt die Gleichung

$$(\overline{S^{-1}}) = (\overline{S})^{-1}.$$

Ist also S ein beliebiges System von nicht verschwindender Determinante, so ist das reziproke System zu seinem konjugierten gleich dem konjugierten System zu seinem reziproken; die beiden Übergänge zu dem konjugierten und zu dem reziproken Systeme sind also miteinander vertauschbar.

§ 2.

Die hier betrachteten Systeme können ebenso wie diejenigen von der zweiten Ordnung in elementare dekomponiert werden, wenn man, was zunächst stets geschehen soll, ihre Determinante als von Null verschieden voraussetzt. Jedoch werden wir hier, entsprechend dem jedesmaligen Zwecke der Untersuchung, zwei verschiedene Arten von Systemen als elementar ansehen und durch sie alle anderen darzustellen suchen.

Für eine erste Art der Dekomposition wollen wir die folgenden Systeme

$$\text{(I)}\quad \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}p, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$$

als elementare Systeme ansehen.

Sie entsprechen vollkommen den bei den Systemen zweiter Ordnung eingeführten Elementarsystemen, nur treten hier der Natur der Sache nach statt des einen Vertauschungssystemes $\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ deren zwei, nämlich die beiden ersten der Reihe (I) auf. Mit Ausnahme des zweiten Systemes dieser Reihe gehen alle anderen unmittelbar aus den entsprechenden früheren Elementarsystemen

$$\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}p, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

durch hintere Ränderung mit den Elementen $\begin{matrix} & & 0\\ & & 0\\ 0, & 0, & 1\end{matrix}$ hervor. Nun ergibt sich aber aus der Kompositionsgleichung für zwei so geränderte Systeme

$$(1)\qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & 0\\ \beta, & \beta', & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b, & 0\\ a', & b', & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a + \alpha' a', & \alpha b + \alpha' b', & 0\\ \beta a + \beta' a', & \beta b + \beta' b', & 0\\ 0\ \ , & 0\ \ , & 1\end{pmatrix},$$

daſs das neue System genau ebenso gerändert ist, wie das ursprüngliche, und daſs die vier übrigen Elemente durch Komposition der beiden Systeme $\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha'\\ \beta, & \beta'\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ entstehen. Genau dasselbe gilt für zwei Systeme von der Form $\begin{pmatrix}\alpha, & 0, & \alpha'\\ 0, & 1, & 0\\ \beta, & 0, & \beta'\end{pmatrix}$; auch hier besteht die analoge Kompositionsgleichung

$$(1\text{a})\qquad \begin{pmatrix}\alpha, & 0, & \alpha'\\ 0, & 1, & 0\\ \beta, & 0, & \beta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & 0, & b\\ 0, & 1, & 0\\ a', & 0, & b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a + \alpha' a', & 0, & \alpha\beta + \alpha'\beta'\\ 0\ \ , & 1, & 0\\ \beta a + \beta' a', & 0, & \beta b + \beta' b'\end{pmatrix}.$$

Man erhält demnach die Regeln für die Komposition dieser Elementarsysteme miteinander einfach aus den entsprechenden für die Systeme zweiter Ordnung.

Zunächst können zu den Systemen (I) sofort auch die beiden anderen

$$\text{(Ia)} \qquad \begin{pmatrix} 1, & t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & t \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

hinzugenommen werden. Für ein ganzzahliges positives t folgt nämlich mit Rücksicht auf die soeben gemachte Bemerkung unmittelbar

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} 1, & t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^t.$$

Für jeden anderen reellen Wert von t kann jenes System vermittelst der schon früher für Systeme zweiter Ordnung bewiesenen Gleichung

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} 1, & t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

durch drei Elementarsysteme dargestellt werden, während das zweite System (Ia) mit dem ersten durch die Gleichung

$$(3a) \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1, & 0, & t \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = {} & \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

zusammenhängt. Hier bewirken die drei vorderen Elementarsysteme zusammengenommen eine Vertauschung der zweiten und dritten Zeile nebst Änderung aller Vorzeichen, die drei hinteren eine Vertauschung der beiden letzten Kolonnen nebst einer Zeichenänderung aller Elemente.

Die beiden ersten Systeme der Reihe (I) werden *Vertauschungssysteme* genannt, einmal weil sie aus dem Einheitssysteme durch Vertauschung der ersten mit der zweiten bezw. dritten Kolonne und darauffolgender Zeichenänderung der letzteren hervorgehen, dann aber auch, weil, wie gleich gezeigt werden wird, eine vordere oder hintere Komposition mit ihnen nur eine Vertauschung zweier Zeilen oder Kolonnen nebst Änderung des Vorzeichens einer derselben herbeiführt. Aus den Sätzen, welche für das entsprechende Vertauschungssystem $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ für vier Elemente hergeleitet wurden, ergeben sich für das erste Vertauschungssystem die Gleichungen

$$\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-1, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$$

$$(4)\qquad \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0, & 1, & 0\\ -1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} = E;$$

$$(4a)\qquad \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a', & -b', & -c'\\ a, & b, & c\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b, & -a, & c\\ b', & -a', & c'\\ b'', & -a'', & c''\end{pmatrix}.$$

Die entsprechenden Gleichungen für das zweite Vertauschungssystem unterscheiden sich von den hier für das erste gegebenen nur dadurch, daſs die zweiten Parallelreihen mit den dritten vertauscht sind. Es ergibt sich also zunächst unter Benutzung von (1a)

$$\begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$$

$$(5)\qquad \begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0, & 0, & 1\\ 0, & 1, & 0\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}^4 = E,$$

und für die vordere bez. hintere Komposition mit diesem Elementarsysteme erhält man die beiden Gleichungen

$$(5a)\qquad \begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a'', & -b'', & -c''\\ a', & b', & c'\\ a, & b, & c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c, & b, & -a\\ c', & b', & -a'\\ c'', & b'', & -a''\end{pmatrix}.$$

Komponiert man die beiden Systeme (Ia) mit einem beliebigen anderen Systeme, so geht das neue System aus dem alten dadurch hervor, daſs zu einer Reihe das t-fache einer Parallelreihe addiert wird. Und zwar ist

$$(6)\quad \begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1, & t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ta', & b+tb', & c+tc' \\ a' & , \; b' & , \; c' \\ a'' & , \; b'' & , \; c'' \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b+a\,t, & c \\ a', & b'+a'\,t, & c' \\ a'', & b''+a''t, & c'' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und die entsprechenden Gleichungen bestehen für das zweite System (Ia), nur daſs an die Stelle der ersten und zweiten Zeile bezw. Kolonne die erste und dritte tritt. Das reziproke System zu $\begin{pmatrix} 1, & t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1, & -t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; nach (3) ist dasselbe also ebenfalls direkt durch die Elementarsysteme darstellbar.

Komponiert man endlich ein System vorn oder hinten mit einem Elementarsysteme $\begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, so entsteht das Kompositionsresultat aus dem ursprünglichen Systeme dadurch, daſs die erste Zeile oder die erste Kolonne mit p multipliziert wird. Ferner ist das reziproke System

$$(7)\qquad \begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

also auch ein Elementarsystem von derselben Art.

Nunmehr kann wiederum leicht gezeigt werden, daſs jedes System $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ mit nicht verschwindender Determinante in lauter Elementarsysteme von der Form (I) dekomponiert werden kann.

Wir können zu diesem Zwecke schon voraussetzen, daſs in dem betrachteten Systeme das erste Element a von Null verschieden ist, da dies entgegengesetzten Falles stets durch Komposition mit einem der beiden Vertauschungssysteme erreicht werden kann.

Wir wollen zunächst zeigen, dafs dieses System durch Komposition mit Elementarsystemen auf die Form $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & 0 \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & 0 \\ 0, & 0, & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix}$ gebracht werden kann. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1, & 0, & \frac{a'}{a} \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & \frac{a''}{a} \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \\ &\qquad \begin{bmatrix} 1, & -\frac{b}{a}, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & -\frac{c}{a} \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & *, & * \\ 0, & *, & * \\ a, & 0, & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Die beiden letzten Kompositionen bringen nämlich die Elemente b und c zum Verschwinden, während die vier vorderen a, a', a'' durch $0, 0, a$ ersetzen; die vier neuen durch Sterne bezeichneten Elemente sind rationale Funktionen der neun ursprünglichen, deren Nenner nur eine Potenz von a ist. Komponiert man das so erhaltene System noch hinten mit dem zweiten Vertauschungssysteme, so tritt die erste Kolonne an die letzte Stelle, und man erhält ein in der oben angegebenen Art gebildetes System, welches nunmehr folgendermafsen bezeichnet sein möge

$$(9)\qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & 0 \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & 0 \\ 0, & 0, & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix}.$$

In der vierten Vorlesung war nun gezeigt worden, wie man ein System von vier Elementen $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}' \end{pmatrix}$ durch Komposition mit Elementarsystemen zweiter Ordnung in ein Diagonalsystem $\begin{pmatrix} p, & 0 \\ 0, & q \end{pmatrix}$ transformieren kann. Rändert man nun alle dort auftretenden Systeme mit $\begin{array}{rrr} & & 0 \\ & & 0, \\ 0, & 0, & 1 \end{array}$ wodurch sie in Systeme dritter Ordnung übergehen, so erhält man unter Benutzung von (1) die Überführung des Systemes (9) in ein Diagonalsystem dritter Ordnung. Nimmt man nämlich $\mathfrak{a} \gtrless 0$ an, was eventuell durch Komposition mit dem ersten Vertauschungssysteme stets erreicht werden kann, so ergibt sich die folgende Dekomposition

$$\begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1, & \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}}, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & 0 \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & 0 \\ 0, & 0, & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1, & -\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & q, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{pmatrix},$$

wo die Elemente p, q, r rationale Funktionen der ursprünglichen neun Elemente sind, welche nur die Nenner a und $\mathfrak{a}$ haben können, und auf deren Werte es nicht weiter ankommt. Zieht man diese Gleichung mit (8) zusammen, dann kann man das so sich ergebende Resultat folgendermaßen schreiben

$$(10)\begin{cases} \left[\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & t, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0, & t\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix} \\ \left[\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & t, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0, & t\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}p, & 0, & 0\\ 0, & q, & 0\\ 0, & 0, & r\end{pmatrix},\end{cases}$$

wo jede der eckigen Klammern ein Produkt von Systemen bedeutet, welches nur aus den beiden Vertauschungssystemen und den in (Ia) angegebenen Systemen besteht.

Endlich kann das Diagonalsystem auf der rechten Seite von (10) noch in Elementarsysteme von der Form (I) zerlegt werden; doch müssen hier auch die Systeme von der Form $\begin{pmatrix}p, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$ notwendig explicite hinzugenommen werden. Zunächst ist nämlich

$$\begin{pmatrix}p, & 0, & 0\\ 0, & q, & 0\\ 0, & 0, & r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & q, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & r\end{pmatrix};$$

das erste von diesen Systemen ist bereits elementar, das zweite und dritte kann durch vordere und hintere Komposition mit den Vertauschungssystemen auf dieselbe Form gebracht werden; in der Tat ist

$$\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & q, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}^3,$$

und die entsprechende Gleichung gilt für das dritte System.

Bezeichnet man also jetzt ganz allgemein jedes System mit

$$[\mathfrak{E}],$$

welches das Resultat der Komposition einer Anzahl der vier Elementarsysteme (I), d. h. von

$$\begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

ist, so sind die Systeme (Ia) auch unter diesen enthalten, und es ist zunächst

$$\begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & q, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{pmatrix} = [\mathfrak{E}].$$

Ferner kann die Hauptgleichung (10) dann in der Form geschrieben werden

$$[\mathfrak{E}]_1 \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} [\mathfrak{E}]_2 = [\mathfrak{E}].$$

Diese Gleichung kann nun dadurch vereinfacht werden, dafs man die beiden Systeme $[\mathfrak{E}]_1$ und $[\mathfrak{E}]_2$ von ihrer linken Seite auf die rechte bringt. Zu diesem Zwecke komponieren wir auf beiden Seiten vorn mit dem reziproken Systeme von $[\mathfrak{E}]_1$ und hinten mit dem reziproken von $[\mathfrak{E}]_2$. Dann bleibt links nur das ursprüngliche System stehen, rechts aber erhält man wieder ein Kompositionsresultat von der Form $[\mathfrak{E}]$, weil ja die Reziproken zu $[\mathfrak{E}]_1$ und $[\mathfrak{E}]_2$ aus den Reziproken der vier Elementarsysteme in umgekehrter Reihenfolge bestehen, und diese nach (3), (4), (5) und (7) ebenfalls aus Elementarsystemen zusammengesetzt sind. So ergibt sich also zuletzt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \right],$$

und damit ist die am Anfange dieses Abschnittes aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 3.

Bei einer zweiten Art der Dekomposition sollen von den soeben betrachteten Systemen (I) nur die drei ersten als elementar angesehen werden, dagegen soll statt des vierten $\begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ das folgende System

$$\begin{Bmatrix} r, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{r}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$$

hinzugenommen werden. Jetzt sollen also die vier Systeme

$$\text{(II)}\quad \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix}\tau, & 0, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix}$$

als elementare angesehen werden. Auch hier können die beiden vorher unter (Ia) aufgeführten Systeme

$$\text{(IIa)}\qquad \begin{pmatrix}1, & t, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix}1, & 0, & t\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$$

hinzugezogen werden, denn aus der leicht verifizierbaren Kompositionsgleichung

$$\begin{bmatrix}\tau, & 0, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix} \begin{pmatrix}1, & \pm 1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} \begin{bmatrix}\frac{1}{\tau}, & 0, & 0\\ 0, & \tau, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1, & \pm \tau^2, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$$

folgt ja, daſs für ein positives oder negatives $t = \pm \tau^2$ das erste jener Systeme durch die elementaren und $\begin{pmatrix}1, & -1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$ darstellbar ist; da aber jenes letzte System nach der aus (4b) auf S. 67 durch Ränderung folgenden Gleichung

$$\begin{pmatrix}1, & -1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$$

seinerseits durch die Elementarsysteme darstellbar ist, so ist unsere Behauptung für das erste System (IIa) erwiesen. Für das zweite folgt ihre Richtigkeit ganz analog unter Benützung von (1a) auf S. 146. Auch die Reziproken zu diesen sechs Elementarsystemen können wieder durch elementare dargestellt werden; dies war für alle früheren bereits bewiesen worden; für das neu eingeführte folgt dieselbe Tatsache aus der Gleichung

$$\begin{bmatrix}\tau, & 0, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\tau}, & 0, & 0\\ 0, & \tau, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix}.$$

Um nun die Darstellbarkeit eines Systemes durch diese Elementarsysteme (II) zu untersuchen, gehen wir aus von der vorher gefundenen Kompositionsgleichung (10) auf S. 151, wo auf der linken Seite in den eckigen Klammern bereits lauter Elementarsysteme auftreten. Schaffen wir diese Elementarsysteme wieder dadurch auf der linken Seite fort,

dafs wir auf beiden Seiten mit ihren Reziproken vorn bezw. hinten komponieren, und berücksichtigen wir, dafs auch die reziproken Systeme durch elementare darstellbar sind, so erhalten wir eine Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = (\bar{E}) \begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & q, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{pmatrix} (\bar{E}),$$

wo jetzt zur Abkürzung mit $\bar{E}$ irgend ein aus den Elementarsystemen (II) komponiertes System verstanden werden soll. Das Diagonalsystem rechts kann nun noch folgendermafsen dekomponiert werden: Es ist

$$\begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & q, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pqr, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{qr}, & 0, & 0 \\ 0, & qr, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{r}, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{bmatrix}.$$

Hier ist das zweite System rechts bereits elementar; das dritte ist wegen der Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{r}, & 0 \\ 0, & 0, & r \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{r}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

aus elementaren zusammengesetzt; nimmt man diese vier Systeme also in (1) zu dem hinteren Systeme $(\bar{E})$ hinzu, so erhält man die Gleichung

$$\text{(2)} \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = (\bar{E}) \begin{pmatrix} pqr, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} (\bar{E}).$$

Geht man nun in dieser Gleichung von den Systemen zu ihren Determinanten über und berücksichtigt dabei, dafs die Determinanten der vier Elementarsysteme (II), mithin auch die der beiden Systeme $(\bar{E})$ gleich eins sind, so erhält man die Gleichung

$$\text{(2a)} \qquad pqr = |a, b, c| = \Delta,$$

d. h. das Produkt pqr ist gleich der Determinante des zur Dekomposition vorgelegten Systemes; jene drei Gröfsen p, q, r sind also für nicht verschwindende Determinanten notwendig von Null verschieden.

Es sei nun die Determinante des vorgelegten Systemes zunächst gleich eins, so ist $pqr = 1$, d. h. in der Gleichung (2) ist das mittlere System das Einheitssystem und kann also fortgelassen werden. Unter dieser Voraussetzung geht demnach die Gleichung (2) über in

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = (\bar{E}),$$

d. h. jedes System mit der Determinante eins, oder was dasselbe ist, jedes „unimodulare“ System ist in Elementarsysteme von der Form (II) dekomponierbar.

Ist nun das System kein unimodulares, d. h. ist Δ eine von eins verschiedene nicht verschwindende Zahl, so ist jedes der beiden Systeme

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}$$

offenbar ein unimodulares; jedes dieser beiden Systeme kann also in elementare dekomponiert werden. Komponiert man nun die beiden so sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = (\bar{E}), \quad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix} = (\bar{E})$$

vorn bezw. hinten mit dem Systeme

$$(\Delta) = \begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

so ergeben sich die beiden für die Folge sehr wichtigen Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = (\Delta)(\bar{E}) = (\bar{E})(\Delta).$$

§ 4.

Die im vorigen Abschnitte zuletzt durchgeführte Dekomposition eines Systemes von neun Elementen kann nun in doppelter Weise zur Herleitung der Invarianteneigenschaften der Determinante benutzt werden. Wir wollen zunächst wieder nach einer Funktion der neun Elemente eines aus zwei anderen S und T komponierten Systemes fragen, für welche die Reihenfolge der Komposition ohne Einfluſs ist, d. h. nach einer Funktion $F(ST)$, für die

$$F(ST) = F(TS) \tag{1}$$

ist. Die Funktion F soll also eine Invariante der Äquivalenz

$$ST \sim TS \tag{1a}$$

für zwei oder mehr komponierte Systeme sein.

Für eine solche Funktion F sind somit zwei Systeme als äquivalent anzusehen, wenn sie, abgesehen von der Reihenfolge, als Kompositionsresultate derselben Systeme dargestellt werden können.

Wir denken uns nun das betrachtete System S mit der nicht verschwindenden Determinante Δ nach (3) des letzten Paragraphen zerlegt; dann ist

$$S = (\bar{E})(\Delta), \tag{1b}$$

wo $(\bar{E})$ nur aus den Elementarsystemen zweiter Art in (II) auf S. 153 komponiert, und $(\Delta) = \begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ ist. Dann zeige ich sofort, daſs jedes der vier Elementarsysteme (II), also auch das System $(\bar{E})$ in (1b), für die Funktion F, d. h. bei Abstraktion von der Reihenfolge der Kompositionen dem Einheitssysteme oder einem Vertauschungssysteme äquivalent ist. Offenbar braucht diese Tatsache nur für das dritte und das vierte von diesen Elementarsystemen bewiesen zu werden, da die beiden ersten selbst Vertauschungssysteme sind.

Dieser Beweis ergibt sich zunächst für das vierte Elementarsystem aus der Dekomposition

$$\begin{bmatrix} t, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{t}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} t, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

denn es ist ja hiernach bei Abstraktion von der Reihenfolge der Kompositionen

$$\begin{bmatrix} t, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{t}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} t, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{t}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Um nun dasselbe auch für das dritte Elementarsystem $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ zu zeigen, beachten wir, daſs dasselbe aus $\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ durch die auf S. 146 angegebene Ränderung entsteht, und daſs es deshalb genügt, den Beweis für dieses System zweiter Ordnung zu führen. Nun ist aber

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

also bei veränderter Reihenfolge der Komponenten, da $\begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}^2 = E$ ist,

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}^2 \sim E; \tag{2}$$

ferner ist

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}=E.$$

Also folgt bei Abstraktion von der Reihenfolge der Kompositionen die andere Äquivalenz

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}^5 \sim E$$

$$\begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}^3 \sim \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix},$$

und wenn man (2) berücksichtigt und mit $\begin{array}{ccc} & & 0\\ & & 0\\ 0, & 0, & 1\end{array}$ rändert, so ergibt sich in der Tat

$$\begin{pmatrix}1, & 1, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0, & 1, & 0\\ -1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}^3.$$

Unter Benutzung dieses Resultates folgt also aus der Gleichung (1b) die Äquivalenz

$$S \sim \left\{\begin{pmatrix}0, & -1, & 0\\ 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & 0, & -1\\ 0, & 1, & 0\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\Delta, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix},$$

wo das in gewundenen Klammern stehende System aus einer beliebigen Anzahl von Vertauschungssystemen besteht. Jedes dieser Systeme bewirkt aber nur eine Permutation der Zeilen von $\begin{pmatrix}\Delta, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$; die gesuchte Invariante $F(S)$ kann somit nur eine Funktion der Determinante Δ von S sein. Da aber der Produktsatz lehrt, daſs die Determinante Δ und damit auch jede Funktion von Δ in der Tat von der Reihenfolge der Komposition unabhängig ist, so ergibt sich das wichtige Resultat:

Eine Funktion der neun Elemente des Systemes

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

ist dann und nur dann von der Reihenfolge der Komponenten unabhängig, wenn sie eine Funktion seiner Determinante Δ ist, wenn also jene Elemente allein in der Verbindung Δ auftreten.

§ 5.

Die Dekomposition in Elementarsysteme von der Form (II) kann zweitens benützt werden, um weitere Invarianteneigenschaften der Determinante hervortreten zu lassen, welche dann zu einem vollständigen Systeme charakteristischer Eigenschaften derselben führen.

Bringt man nämlich in der Gleichung (3) auf S. 155 die Elementarsysteme auf die linke Seite, was ja durch Komposition mit den Reziproken geschehen kann, so erhält man zwei Gleichungen, welche folgendermaßen geschrieben werden können

$$(1) \qquad (\bar{E})\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}(\bar{E}) = \begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiert man also zunächst zwei Systeme als äquivalent, wenn das eine in das andere durch hintere Komposition mit den Elementarsystemen (II) übergeführt werden kann, so folgt aus der zweiten Gleichung die Äquivalenz

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Sucht man daher eine Invariante dieser Äquivalenz, d. h. eine Funktion $J(a, b, c)$ der neun Elemente $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$, welche ihren Wert nicht ändert, wenn sie hinten mit einem der vier Elementarsysteme (II) komponiert wird, so kann das nur eine Funktion der Determinante sein, denn nach (3) ist notwendig

$$(4) \qquad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Da nun jene Funktion J nur ungeändert zu bleiben braucht bei der Komposition mit jenen vier Elementarsystemen, so ist für das Bestehen der Gleichung (4) nur das der folgenden vier Gleichungen erforderlich

$$\text{(5a)}\quad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\left(\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\right) = J\begin{pmatrix} b, & -a, & c \\ b', & -a', & c' \\ b'', & -a'', & c'' \end{pmatrix}$$

$$\text{(5b)}\quad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\left(\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}\right) = J\begin{pmatrix} c, & b, & -a \\ c', & b', & -a' \\ c'', & b'', & -a'' \end{pmatrix}$$

$$\text{(5c)}\quad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\left(\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\right) = J\begin{pmatrix} a, & a+b, & c \\ a', & a'+b', & c' \\ a'', & a''+b'', & c'' \end{pmatrix}$$

$$\text{(5d)}\quad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\left(\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{p}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\right) = J\begin{pmatrix} ap, & b\frac{1}{p}, & c \\ a'p, & b'\frac{1}{p}, & c' \\ a''p, & b''\frac{1}{p}, & c'' \end{pmatrix}.$$

Ist also $J(a, b, c)$ eine Funktion der neun Elemente (a, b, c), welche sich nicht ändert, wenn für die erste Kolonne die zweite oder die dritte gesetzt wird und zugleich für diese die negativ genommene erste, wenn ferner die erste Kolonne zur zweiten addiert wird, und wenn endlich die erste Kolonne mit p multipliziert und zugleich die zweite durch p dividiert wird, so mufs J eine Funktion der Determinante sein.

Für die vordere Komposition mit Elementarsystemen, d. h. für die Äquivalenz

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \sim (\bar{E})\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

ergibt sich ganz ebenso: Ist $J(a, b, c)$ eine Funktion der neun Elemente (a, b, c), für welche die vier Gleichungen erfüllt sind

$$\text{(6)}\quad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} -a', & -b', & -c' \\ a, & b, & c \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} -a'', & -b'', & -c'' \\ a', & b', & c' \\ a, & b, & c \end{pmatrix}$$

$$= J\begin{pmatrix} a+a', & b+b', & c+c' \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} pa, & pb, & pc \\ \frac{1}{p}a', & \frac{1}{p}b', & \frac{1}{p}c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix},$$

so besteht notwendig die Gleichung

$$J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix};$$

d. h. eine Funktion $J(a, b, c)$, welche ungeändert bleibt, wenn man die zweite oder die dritte Zeile durch die erste und zugleich die erste durch die negativ genommene zweite oder dritte Zeile ersetzt, wenn man ferner zu der ersten Zeile die zweite addiert, und wenn man endlich die erste Zeile mit p multipliziert und zugleich die zweite durch p dividiert, kann nur eine Funktion der Determinante sein.

Setzt man schliefslich noch in beiden Fällen fest, dafs

$$\text{(6a)} \qquad J\begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \Delta$$

sein soll, so ist durch diese und durch jede der beiden obigen Bestimmungen jene Funktion als die Determinante selbst charakterisiert. Dafs umgekehrt die Determinante $|a, b, c|$ die hier angegebenen beiden Klassen von charakteristischen Eigenschaften wirklich besitzt, ist schon oben aus der Auflösung der linearen Gleichungen hergeleitet worden.

Man hat somit in der Determinante eines der in der Mathematik nicht häufigen Beispiele dafür, dafs eine Funktion durch eine Anzahl von Eigenschaften völlig eindeutig bestimmt ist.

Diese beiden Klassen von charakteristischen Eigenschaften können auch durch äquivalente ersetzt werden, welche für die Anwendungen vielfach bequemer sind. Man kann nämlich den Satz aussprechen:

> Eine Funktion $J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$, welche in den Elementen der ersten Zeile homogen und linear ist, und bei Vertauschung der ersten Zeile mit der zweiten oder dritten nur ihr Vorzeichen ändert, unterscheidet sich von der Determinante nur durch einen konstanten Faktor.

In der Tat kann man zeigen, dafs aus diesen Eigenschaften die in (6) angegebenen unmittelbar folgen. Offenbar sind nämlich die folgenden Gleichungen nur eine Folge der soeben über J gemachten Voraussetzungen

$$\text{(7a)} \quad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = -J\begin{pmatrix} a', & b', & c' \\ a, & b, & c \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} -a', & -b', & -c' \\ a, & b, & c \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

$$\text{(7b)} \quad J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = -J\begin{pmatrix} a'', & b'', & c'' \\ a', & b', & c' \\ a, & b, & c \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} -a'', & -b'', & -c'' \\ a', & b', & c' \\ a, & b, & c \end{pmatrix},$$

ferner folgt aus denselben Annahmen sofort

$$J\begin{pmatrix} a', & b', & c' \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = -J\begin{pmatrix} a', & b', & c' \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = 0;$$

und da J in den Elementen (a, b, c) homogen und linear ist,

$$(7c)\quad J\begin{pmatrix} a+a', & b+b', & c+c' \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} + J\begin{pmatrix} a', & b', & c' \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$
$$= J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix};$$

aus derselben Eigenschaft von J ergibt sich endlich

$$(7d)\quad J\begin{pmatrix} pa, & pb, & pc \\ \frac{1}{p}a', & \frac{1}{p}b', & \frac{1}{p}c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = pJ\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ \frac{1}{p}a', & \frac{1}{p}b', & \frac{1}{p}c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = -pJ\begin{pmatrix} \frac{1}{p}a', & \frac{1}{p}b', & \frac{1}{p}c' \\ a, & b, & c \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$
$$= -p\cdot\frac{1}{p}J\begin{pmatrix} a', & b', & c' \\ a, & b, & c \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = +J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}.$$

Da aber diese Gleichungen mit den entsprechenden in (6) übereinstimmen, so muſs die Gleichung bestehen

$$J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} \Delta, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix};$$

aus dieser Gleichung folgt endlich nach der ersten Eigenschaft von J

$$J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \Delta J\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \Delta . C.$$

Damit ist dieser Satz bewiesen.

Fügt man zu den obigen Eigenschaften noch als letzte Bedingung hinzu, daſs $J(E) = 1$ sein soll, so ist auch durch sie die Determinante eindeutig bestimmt.

Ganz ebenso kann man, wie man ohne weiteres erkennt, die Determinante auch durch die entsprechenden Eigenschaften in Bezug auf ihre Vertikalreihen vollständig definieren. Es gilt nämlich der Satz, der durch die analogen Schlüsse bewiesen wird:

Eine Funktion $J\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ der neun Elemente eines Systemes (a, b, c), welche homogen und linear ist in Bezug auf ihre erste Kolonne, welche bei der Vertauschung der ersten mit einer anderen Vertikalreihe nur ihr Zeichen ändert, und welche für das Einheitssystem den Wert eins hat, ist der Determinante jener neun Gröfsen gleich.

Aus diesen beiden Sätzen fliefst ein sehr naturgemäfser Beweis des Multiplikationstheoremes: Ist nämlich die Funktion $J(S)$ gleich der Determinante von S, so besitzt sie die soeben charakterisierten Eigenschaften und zwar für die Zeilen und für die Kolonnen. Betrachtet man nun dieselbe Funktion für ein komponiertes System

$$J\left(\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix}\right)$$

$$= J\begin{pmatrix} a\ \alpha + b\ \beta + c\ \gamma, & a\ \alpha' + b\ \beta' + c\ \gamma', & a\ \alpha'' + b\ \beta'' + c\ \gamma'' \\ a'\ \alpha + b'\ \beta + c'\ \gamma, & a'\ \alpha' + b'\ \beta' + c'\ \gamma', & a'\ \alpha'' + b'\ \beta'' + c'\ \gamma'' \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma, & a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma', & a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' \end{pmatrix},$$

so ist sie, als Funktion der Elemente des ersten Systemes betrachtet, homogen und linear in Bezug auf die erste Zeile desselben, weil die drei Elemente a, b, c rechts nur in der ersten Zeile auftreten; ferner ändert sie ihr Zeichen, wenn z. B. (a, b, c) mit (a', b', c') vertauscht werden, weil ja dann auf der rechten Seite die erste mit der zweiten Zeile vertauscht wird. Es ist also $J\big((a, b, c)(\alpha, \alpha', \alpha'')\big)$ gleich $J(a, b, c)$, multipliziert mit einem von dem ersten Systeme unabhängigen Faktor. Da aber diese Funktion in Bezug auf die Vertikalreihen des zweiten Systemes genau dieselben Eigenschaften hat, so ist jener zweite Faktor durch $J(\alpha, \alpha', \alpha'')$ teilbar; es ist also

$$J\big((a, b, c)(\alpha, \alpha', \alpha'')\big) = C \cdot J(a, b, c)\, J(\alpha, \alpha', \alpha''),$$

wo der Faktor C von den Elementen beider Komponenten unabhängig ist. Setzt man also, um ihn zu bestimmen, die beiden Systeme (a, b, c) und $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ gleich dem Einheitssysteme, wodurch ja $(a, b, c)(\alpha, \alpha', \alpha'')$ ebenfalls gleich E wird, so ergibt sich

$$C = 1,$$

und damit ist der Multiplikationssatz vollständig bewiesen.

Zehnte Vorlesung.

Die Reduktion ganzzahliger Systeme. — Die verschiedenen Arten der Äquivalenz. — Bestimmung der Klassenzahl für vordere oder hintere Komposition mit unimodularen Systemen. — Die Auflösung von drei homogenen linearen Gleichungen mit vier Unbekannten und konstanten Koeffizienten. — Der Rang der Systeme. — Anwendung auf drei nicht homogene lineare Gleichungen und auf die Schnittfigur von Ebenen im Raume.

§ 1.

Wir gehen jetzt zu den arithmetischen Anwendungen unserer Theorie über, d. h. wir nehmen die Elemente der betrachteten Systeme als ganze Zahlen an und untersuchen die Veränderungen, welche sie durch Komposition mit ganzzahligen Elementarsystemen erfahren. Ebenso setzen wir den Bereich der drei Variablen x, y, z als die Gesamtheit aller ganzzahligen Werte derselben voraus; dann entspricht diesem Bereiche geometrisch nicht mehr der ganze Raum, sondern nur noch die Gesamtheit aller Gitterpunkte P, deren rechtwinklige Koordinaten (x, y, z) ganze Zahlen sind.

Betrachtet man nun drei andere Variablen (ξ, η, ζ), welche mit (x, y, z) durch die linearen ganzzahligen Gleichungen

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\xi &= \lambda\, x + \mu\, y + \nu\, z\\
\eta &= \lambda' x + \mu' y + \nu' z\\
\zeta &= \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z
\end{aligned}
$$

zusammenhängen, so entsprechen allen ganzzahligen Wertsystemen (x, y, z) auch ganzzahlige (ξ, η, ζ), jedoch wird das Umgekehrte im allgemeinen nicht stattfinden. Ist nämlich die Determinante des Systemes (λ, μ, ν) von Null verschieden, und ist

$$
\begin{pmatrix} l, & l', & l'' \\ m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix}
$$

das zu (λ, μ, ν) reziproke System, so daſs also

$$\begin{pmatrix} l, & l', & l'' \\ m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

ist, so erhält man, wenn man die Gleichungen (1) beziehlich mit l, l', l'' multipliziert und addiert und dann entsprechend mit m, m', m'' und n, n', n'' verfährt, die folgenden Ausdrücke von (x, y, z) durch (ξ, η, ζ)

$$\begin{aligned} x &= l\,\xi + l'\,\eta + l''\,\zeta \\ y &= m\xi + m'\eta + m''\zeta \\ z &= n\,\xi + n'\,\eta + n''\,\zeta, \end{aligned} \tag{1a}$$

und man erkennt sofort, daſs allen ganzzahligen Werten von (ξ, η, ζ) dann und nur dann ganzzahlige (x, y, z) entsprechen werden, wenn auch das zu (λ, μ, ν) reziproke System (l, l', l'') ein ganzzahliges ist.

Da nun die Determinanten der reziproken Systeme $|\lambda, \mu, \nu|$ und $|l, l', l''|$ stets reziproke Zahlen sind, so sind sie dann und nur dann beide ganz, wenn sie den Wert ± 1 haben. Ist das aber der Fall, so ist das reziproke System sicher ganzzahlig, weil die Determinante der einzige möglicherweise in demselben auftretende Nenner ist. Man erhält also den Satz:

> Hängen die ganzzahligen Variablen (x, y, z) mit (ξ, η, ζ) durch eine ganzzahlige Substitution zusammen, so entsprechen sich ihre Bereiche dann und nur dann eindeutig, wenn die Substitutionsdeterminante gleich ± 1 ist.

Auch hier wollen wir der Einfachheit wegen nur solche Substitutionssysteme betrachten, deren Determinante $+1$ ist, und diese wie früher unimodulare Systeme nennen. Hier tritt nun bei arithmetischen Untersuchungen, z. B. bei der Theorie der bilinearen und der quadratischen Formen, wieder die Frage auf, welches die einfachste Form ist, auf welche ein ganzzahliges System

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

von nicht verschwindender Determinante durch Komposition mit unimodularen ganzzahligen Systemen reduziert werden kann, und zwar entweder durch vordere oder durch hintere Komposition, oder endlich durch Anwendung beider Kompositionen zugleich.

Auch die unimodularen Systeme können aus elementaren zusammengesetzt werden, wie gleich gezeigt werden soll, und zwar aus

denjenigen unter den Systemen (I) auf S. 146, deren Determinante gleich eins ist, d. h. aus

(III) $$\begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu ihnen können unmittelbar wieder hinzugenommen werden die beiden anderen

(IIIa) $$\begin{pmatrix} 1, & \pm t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & \pm t \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

in welchen t eine positive ganze Zahl ist; das erste System, weil

$$\begin{pmatrix} 1, & \pm t, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \pm 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^t$$

ist, und da ferner $\begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ vermöge der Gleichung auf S. 153 aus Elementarsystemen komponiert werden kann. Das zweite System in (IIIa) endlich hängt ja mit dem ersten und den übrigen Elementarsystemen durch die Gleichung (3a) auf S. 147 zusammen.

Erklärt man nun zwei ganzzahlige Systeme zunächst für äquivalent, wenn das eine dadurch in das andere übergeführt werden kann, daſs man es vorn mit einem oder mehreren ganzzahligen Elementarsystemen (III) und (IIIa) komponiert, so daſs also

$$S \sim (\mathfrak{E})\, S$$

ist, wo $(\mathfrak{E})$ irgend ein aus jenen Systemen (III) komponiertes System bezeichnet, dann läſst sich jedes System $S = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ von nicht verschwindender Determinante auf ein äquivalentes von besonders einfacher Form reduzieren.

Wir können zunächst in diesem Systeme a' als von Null verschieden voraussetzen, da ja nicht $a = a' = a'' = 0$ sein kann, und wir somit entgegengesetzten Falles durch vordere Komposition mit einem Vertauschungssysteme ein nicht verschwindendes Element der ersten Kolonne an die zweite Stelle bringen können. Alsdann können wir die ganze Zahl t so bestimmen, daſs in dem Kompositionsresultate

$$\begin{pmatrix}1, & t, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+ta', & b+tb', & c+tc'\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix}$$

an die Stelle von a ein Element $(a + ta')$ tritt, welches nicht negativ und kleiner ist als der absolute Wert von a'. Bringt man dieses dann an die Stelle des zweiten Elementes, so hat man dasselbe seinem absoluten Werte nach verkleinert, und diese Verkleinerung kann so lange fortgesetzt werden, bis an der ersten Stelle das Element Null erscheint. Bringt man diese Null an die dritte Stelle, so erhält man ein System

$$\begin{pmatrix}\alpha, & *, & *\\ \alpha', & *, & *\\ 0, & *, & *\end{pmatrix},$$

und durch genau dasselbe Verfahren kann man jetzt auch das Element α' ebenfalls zu Null machen. So erhält man zuletzt ein äquivalentes System

$$\begin{pmatrix}0, & \beta, & \gamma\\ 0, & \beta', & \gamma'\\ \alpha'', & \beta'', & \gamma''\end{pmatrix}.$$

Da die Determinante dieses Systems nicht verschwindet, so muſs mindestens eine der Zahlen β und β' von Null verschieden sein. Das vorher angegebene Verfahren kann also auch auf β und β' angewendet und eine dieser Zahlen dadurch zu Null gemacht werden. Durch geeignete Zeilenvertauschung ergibt sich so eine Äquivalenz von der Form

$$\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ a'', & b'', & c''\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}\\ 0, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{c}'\\ 0, & 0, & \mathfrak{c}''\end{pmatrix}.$$

Das auf der rechten Seite dieser Äquivalenz stehende System kann noch dadurch reduziert werden, daſs man $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}'$ als positiv voraussetzen darf, da ja entgegengesetzten Falles das erste durch vordere Komposition mit $\begin{pmatrix}-1, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$, das zweite durch Komposition mit

$$\begin{pmatrix}-1, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & -1, & 0\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$$

erreicht werden kann. Das dritte Element $\mathfrak{c}''$ wird dann offenbar positiv oder negativ sein, je nachdem dasselbe für die Determinante der Fall ist.

Endlich kann man noch jedes der außerhalb der Diagonale stehenden Elemente so reduzieren, daß es nicht negativ und kleiner ist als der absolute Wert des unter ihm stehenden Diagonalgliedes, d. h. daß die folgenden Ungleichungen bestehen

$$0 \leqq \mathfrak{b} < \mathfrak{b}', \quad 0 \leqq {\textstyle\substack{\mathfrak{c}\\ \mathfrak{c}'}} < |\mathfrak{c}''|.$$

Das erste erreicht man nämlich dadurch, daß man das t_1-fache der zweiten Zeile zur ersten addiert und t_1 so bestimmt, daß $\mathfrak{b} + t_1 \mathfrak{b}'$ der für $\mathfrak{b}$ gestellten Bedingung genügt. Die zweite und dritte Bedingung kann man dadurch erfüllen, daß man das t_2-fache der dritten Zeile zur ersten und, was offenbar ebenfalls erlaubt ist, das t_3-fache der dritten zur zweiten Zeile addiert und t_2 und t_3 ebenfalls geeignet bestimmt. Man erhält also den Satz:

Jedes ganzzahlige System $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ kann durch vordere Komposition mit einem unimodularen Systeme in ein reduziertes

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ 0, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{c}' \\ 0, & 0, & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix}$$

übergeführt werden, welches dadurch charakterisiert ist, daß

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{a} > 0, \quad \mathfrak{b}' > 0$$

$$\text{(II)} \qquad 0 \leqq \mathfrak{b} < \mathfrak{b}', \quad 0 \leqq {\textstyle\substack{\mathfrak{c}\\ \mathfrak{c}'}} < |\mathfrak{c}''|$$

ist.

Man zeigt endlich leicht, daß jedes System auch nur einem reduzierten in diesem Sinne äquivalent ist. Der Beweis beruht einfach auf der Tatsache, daß zwei reduzierte Systeme nur dann äquivalent sind, wenn sie gleich sind, d. h. daß ein System

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ 0, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{c}' \\ 0, & 0, & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix},$$

dessen erste Komponente unimodular ist, nur dann wieder reduziert ist, wenn $(\alpha, \alpha', \alpha'')$ das Einheitssystem ist. Den sehr einfachen Beweis dieses Satzes können wir dem Leser überlassen.

Somit ergibt sich der wichtige Satz:

Jedes ganzzahlige System ist einem und nur einem reduzierten äquivalent.

Dieser Satz gibt uns nun die Möglichkeit, die Anzahl der Klassen nicht äquivalenter Systeme einer gegebenen Determinante Δ zu bestimmen; dieselbe ist nämlich genau gleich der Anzahl der reduzierten Systeme $\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \\ 0, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{c}' \\ 0, & 0, & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix}$ für diese Determinante. Die gesuchte Klassenanzahl ist genau gleich der Anzahl der Systeme von sechs ganzen Zahlen, für welche

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'' = \Delta, \tag{I}$$

$$\mathfrak{a} > 0, \quad \mathfrak{b}' > 0, \tag{II}$$

$$0 \leqq \mathfrak{b} < \mathfrak{b}', \quad 0 \leqq \substack{\mathfrak{c}\\ \mathfrak{c}'} < |\mathfrak{c}''|. \tag{III}$$

Ist zunächst $\Delta = 1$, ist also das betrachtete System selbst ein unimodulares, so existiert offenbar nur das eine reduzierte System $\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$; jedes unimodulare System ist also dem Einheitssysteme äquivalent, oder es besteht die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = (\mathfrak{E})\,E = (\mathfrak{E}).$$

Jedes unimodulare System kann also aus den drei Elementarsystemen (III) S. 165 komponiert werden.

Das *Diophant*ische Problem, neun ganze Zahlen zu bestimmen, deren Determinante gleich eins ist, kann mithin keine Lösung besitzen, die nicht durch eine solche Komposition zu erlangen wäre; allerdings erhält man auch hier jene Lösungen mehrfach.

Um die Klassenanzahl im allgemeinen Falle zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daſs dieselbe für zwei entgegengesetzt gleiche Determinanten Δ und $-\Delta$ denselben Wert besitzt; denn jedes reduzierte System für die Determinante Δ geht durch die Änderung des Vorzeichens von $\mathfrak{c}''$ in ein reduziertes für die Determinante $-\Delta$ über.

Ist also Δ eine positive Zahl und

$$\Delta = d_0\,d_1\,d_2 \tag{2}$$

eine beliebige Zerlegung derselben in drei positive Faktoren, so entsprechen gerade dieser Zerlegung die folgenden reduzierten Systeme

$$\mathfrak{a} = d_0,$$
$$\mathfrak{b}' = d_1, \qquad \mathfrak{b} = 0, 1, \ldots d_1 - 1,$$
$$\mathfrak{c}'' = d_2, \qquad \mathfrak{c} = 0, 1, \ldots d_2 - 1, \qquad \mathfrak{c}' = 0, 1, \ldots d_2 - 1.$$

Die Anzahl dieser reduzierten Systeme ist also $d_1 d_2^2$, und da das Analoge für jede Zerlegung (2) von Δ gilt, so hat man den Satz:

Die Klassenanzahl $K(\Delta)$ der Systeme von der Determinante Δ ist

$$K(\Delta) = \Sigma\, d_0^0\, d_1^1\, d_2^2 = \Sigma\, d_1\, d_2^2,$$

wenn $\Delta = d_0\, d_1\, d_2$ ist und über alle Zerlegungen von Δ in drei Faktoren summiert wird.

Ist also Δ gleich einer Primzahl p, so hat man die drei Zerlegungen

$$\Delta = p\,.\,1\,.\,1 = 1\,.\,p\,.\,1 = 1\,.\,1\,.\,p,$$

d. h.

$$K(p) = 1 + p + p^2.$$

Ebenso folgt für $\Delta = p^2$ aus den sechs Zerlegungen

$$\begin{aligned} \Delta &= p^2.1.1 = 1.p^2.1 = 1.1.p^2 \\ &= p\,.\,p\,.1 = p\,.1\,.\,p = 1.p.p \\ K(p^2) &= 1 + p^2 + p^4 + p + p^2 + p^3 \\ &= (1 + p + p^2)(1 + p^2). \end{aligned}$$

Man kann leicht die Klassenanzahl $K(\Delta)$ der nicht äquivalenten Systeme für eine beliebige positive Determinante Δ bestimmen. Ist nämlich zunächst

$$\Delta = P\,Q$$

irgend eine Zerlegung von Δ in zwei teilerfremde Faktoren, so ist stets

$$K(\Delta) = K(P)\,K(Q).$$

Sind nämlich $P = d_0\, d_1\, d_2$, $Q = e_0\, e_1\, e_2$ irgend zwei Zerlegungen von P und Q, so ist

$$\Delta = (d_0\, e_0)\,(d_1\, e_1)\,(d_2\, e_2)$$

eine Zerlegung von $\Delta = P\,Q$, und umgekehrt kann, da P und Q teilerfremd sind, in jeder Zerlegung $\Delta = \delta_0\, \delta_1\, \delta_2$ von Δ jeder der drei Faktoren δ_i auf eine einzige Art in ein Produkt $d_i\, e_i$ zerlegt werden. Also ist in der Tat

$$K(P)\,K(Q) = (\Sigma\, d_1\, d_2^2)\,(\Sigma\, e_1\, e_2^2) = \Sigma\,(d_1\, e_1)\,(d_2\, e_2)^2 = \Sigma\, \delta_1\, \delta_2^2 = K(\Delta),$$

was zu beweisen war.

Hiernach braucht also die Klassenanzahl nur für den Fall bestimmt zu werden, daſs $\Delta = p^r$ eine beliebige Primzahlpotenz ist. Alsdann ist aber

$$K(p^r) = \Sigma p^{r_1} . p^{2r_2} \qquad (r = r_0 + r_1 + r_2),$$

wenn $r_0 + r_1 + r_2 = r$ alle Zerlegungen von r in drei nicht negative Summanden bedeutet. Trennt man die rechts stehende Summe in zwei andere, je nachdem $r_0 > 0$ und $r_0 = 0$, oder je nachdem $r_1 + r_2 < r$ oder $= r$ ist, so ergibt sich

$$K(p^r) = \sum_{r_1 + r_2 \leqq r-1} p^{r_1 + 2r_2} + \sum_{r_1 + r_2 = r} p^{r_1 + 2r_2};$$

beachtet man aber, daſs die erste Summe nach der obigen Definition gleich $K(p^{r-1})$, für die letzte aber

$$\sum_{r_1 + r_2 = r} p^{r_1 + 2r_2} = p^r \sum_{r_2 = 0}^{r} p^{r_2} = p^r \frac{p^{r+1} - 1}{p-1}$$

ist, so ergibt sich für die gesuchte Klassenanzahl die einfache Rekursionsformel

$$K(p^r) - K(p^{r-1}) = p^r \frac{p^{r+1} - 1}{p-1}.$$

Bildet man dieselben Gleichungen für $r-1, r-2, \ldots 1$ und addiert sie dann, so erhält man endlich für die gesuchte Klassenanzahl die Gleichung

$$K(p^r) = \frac{p-1}{p-1} + p\frac{p^2-1}{p-1} + p^2\frac{p^3-1}{p-1} + \cdots + p^r\frac{p^{r+1}-1}{p-1}$$
$$= \frac{(p^{r+1}-1)(p^{r+2}-1)}{(p-1)\quad(p^2-1)},$$

wie eine leichte Rechnung ergibt. Also ist für eine beliebige positive oder negative Determinante $\Delta = \pm \Pi p^r$

$$K(\Delta) = \Pi \frac{(p^{r+1}-1)(p^{r+2}-1)}{(p-1)\quad(p^2-1)},$$

wo die Multiplikation über alle in Δ enthaltenen Primzahlpotenzen auszudehnen ist.

Ganz ähnlich kann für beliebige ganzzahlige Systeme von n^2 Elementen die Klassenanzahl bestimmt werden, worauf aber hier nur hingewiesen werden mag.

Die Gestalt der reduzierten Systeme ändert sich entsprechend, wenn statt der vorderen Komposition mit Elementarsystemen die hintere betrachtet wird, d. h. wenn zwei Systeme dann als äquivalent angesehen werden, wenn das eine in das andere durch hintere Kom-

position mit Elementarsystemen übergeführt werden kann. Macht man hier dieselben Operationen mit den Kolonnen, wie vorher mit den Zeilen, so gelangt man zu einem reduzierten Systeme, welches sich von dem obigen auch nur dadurch unterscheidet, daſs die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht sind. Also ist auch die Klassenanzahl für diese reduzierten Systeme genau dieselbe wie vorher.

Der Verlauf der wichtigen Reduktion bei der Erklärung

$$S \sim (\mathfrak{E}) S (\mathfrak{E}),$$

d. h. bei Zulassung der vorderen und hinteren Komposition mit Elementarsystemen wird bei der allgemeinen Theorie ausführlich erörtert werden.

§ 2.

Die vorausgeschickten Untersuchungen über die Systeme und ihre Determinanten geben uns nun die Möglichkeit, ein System von drei Gleichungen nicht bloſs im allgemeinen Falle, d. h. für unbestimmte Koeffizienten, sondern auch für jedes besondere Koeffizientensystem vollständig aufzulösen; und die Untersuchung der hier möglichen Fälle wird uns von selbst auf einen der wichtigsten Begriffe in der ganzen Theorie, den bereits in einem früheren Abschnitte eingeführten Rang der Systeme hinführen. Um die Unterscheidung der möglichen Fälle übersichtlicher darstellen zu können, wollen wir zuerst drei homogene lineare Gleichungen mit vier Unbekannten betrachten. Die entsprechenden Resultate für nicht homogene Gleichungen können dann ohne Schwierigkeit aus den hier gefundenen hergeleitet werden.

Entsprechend der schon früher angewandten Art der Fragestellung betrachten wir jetzt die folgende Aufgabe:

> In welcher Weise wird die Variabilität der vier Veränderlichen (x, y, z, u) durch die Bedingung beschränkt, daſs die drei homogenen linearen Funktionen derselben
>
> $$\begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z + d\,u \\ f' &= a'x + b'y + c'z + d'u \\ f'' &= a''x + b''y + c''z + d''u \end{aligned} \tag{1}$$
>
> sämtlich verschwinden sollen?

Die Koeffizienten dieser Funktionen sollen jetzt bestimmte Zahlen sein; dann können die folgenden vier Fälle eintreten:

I. Von den vier Determinanten dritter Ordnung, welche aus dem Koeffizientensysteme

$$S = \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a', & b', & c', & d' \\ a'', & b'', & c'', & d'' \end{pmatrix} \tag{2}$$

gebildet werden können, ist mindestens eine von Null verschieden; man sagt dann, das Koeffizientensystem ist **vom Range Drei.** Dann kann das Funktionensystem (f, f', f'') durch ein sogenanntes reduziertes (F, F', F'') ersetzt werden, von dem jede Funktion nur zwei der Variablen enthält. Ist nämlich eine jener vier Determinanten des Systemes S von Null verschieden, so können wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, die erste, d. h. die Determinante $|a, b, c|$ als von Null verschieden voraussetzen, da ja hier keine Variable vor der anderen bevorzugt wird. Es sei nun

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{a}', & \mathfrak{a}'' \\ \mathfrak{b}, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{b}'' \\ \mathfrak{c}, & \mathfrak{c}', & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix} \tag{3}$$

das zu (a, b, c) adjungierte, d. h. das aus den Unterdeterminanten zweiter Ordnung von $|a, b, c|$ gebildete System; dann besteht die Kompositionsgleichung

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{a}', & \mathfrak{a}'' \\ \mathfrak{b}, & \mathfrak{b}', & \mathfrak{b}'' \\ \mathfrak{c}, & \mathfrak{c}', & \mathfrak{c}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a, b, c|, & 0, & 0 \\ 0, & |a, b, c|, & 0 \\ 0, & 0, & |a, b, c| \end{pmatrix}. \tag{3a}$$

Betrachtet man nun die drei Funktionen

$$\begin{aligned} F &= \mathfrak{a} f + \mathfrak{a}' f' + \mathfrak{a}'' f'' \\ F' &= \mathfrak{b} f + \mathfrak{b}' f' + \mathfrak{b}'' f'' \\ F'' &= \mathfrak{c} f + \mathfrak{c}' f' + \mathfrak{c}'' f'', \end{aligned} \tag{4}$$

so befriedigt jede Lösung von $(f = 0,\ f' = 0,\ f'' = 0)$ auch das Gleichungssystem $(F = 0,\ F' = 0,\ F'' = 0)$. Aber das Umgekehrte gilt auch: Multipliziert man nämlich die Funktionen (4) mit (a, b, c), bezw. (a', b', c'), (a'', b'', c'') und beachtet dabei die aus (3a) sich ergebenden neun Gleichungen, so ergibt sich die folgende Darstellung von (f, f', f'') durch (F, F', F'')

$$\begin{aligned} |a, b, c| f &= a\ F + b\ F' + c\ F'' \\ |a, b, c| f' &= a' F + b' F' + c' F'' \\ |a, b, c| f'' &= a'' F + b'' F' + c'' F'', \end{aligned} \tag{4a}$$

und hieraus ergibt sich, daſs auch jede Lösung von $(F = 0, F' = 0, F'' = 0)$ die ursprünglichen Gleichungen befriedigt. Die beiden Funktionensysteme (f, f', f'') und (F, F', F'') beschränken somit durch ihr Ver-

schwinden die Variabilität von (x, y, z, u) in genau derselben Weise; sie sind also in diesem Sinne äquivalent.

Ersetzt man aber in (4) die Funktionen f, f', f'' durch ihre Ausdrücke in (1), so erkennt man leicht, daſs F die folgende Gestalt erhält

$$F = (\mathfrak{a}a + \mathfrak{a}'a' + \mathfrak{a}''a'')x + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{a}'b' + \mathfrak{a}''b'')y + (\mathfrak{a}c + \mathfrak{a}'c' + \mathfrak{a}''c'')z + (\mathfrak{a}d + \mathfrak{a}'d' + \mathfrak{a}''d'')u;$$

und da $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')$ das zu (a, b, c) adjungierte System ist, so ist

$$F = |a, b, c|x + |b, b, c|y + |c, b, c|z + |d, b, c|u.$$

Beachtet man nun, daſs hier die Koeffizienten von y und z verschwinden, und bildet man die analogen Ausdrücke von F' und F'', so ergibt sich für das System (F, F', F'') die folgende Darstellung

$$(5)\qquad \begin{aligned} F &= |a, b, c|x && && + |d, b, c|u = 0 \\ F' &= && |a, b, c|y && + |a, d, c|u = 0 \\ F'' &= && && |a, b, c|z + |a, b, d|u = 0. \end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser drei Gleichungen $(F = 0,\ F' = 0,\ F'' = 0)$ erhält man die schon früher gefundenen Ausdrücke

$$(6)\qquad x:y:z:u = -|b, c, d| : |c, d, a| : -|d, a, b| : |a, b, c|,$$

und das ist die einzige Lösung, welche das ursprüngliche Gleichungssystem in diesem Falle hat. Ist t eine neue Variable, so kann die vollständige Lösung auch in der folgenden Form geschrieben werden

$$(6a)\quad x = -|b, c, d|t,\quad y = |c, d, a|t,\quad z = -|d, a, b|t,\quad u = |a, b, c|t.$$

Da sich in diesem Falle alle vier Variablen durch eine einzige t ausdrücken, so sagt man, jene Gleichungen besitzen eine einfache Mannigfaltigkeit von Lösungen.

II. Der zweite mögliche Fall ist der, daſs alle vier Determinanten dritter Ordnung der Matrix S gleich Null sind, daſs aber mindestens eine der Determinanten zweiter Ordnung, welche aus S gebildet werden können, von Null verschieden ist. Wir sagen dann, die Matrix S ist vom Range Zwei. Wegen der Vertauschbarkeit der Variablen und der Gleichungen können wir wieder ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen, daſs die erste Determinante zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = \mathfrak{c}''$$

von S von Null verschieden ist. Dann kann man leicht zeigen, daſs das System (f, f', f'') äquivalent dem einfacheren (f, f') ist, d. h., daſs von

den drei Gleichungen ($f=0,\ f'=0,\ f''=0$) die dritte eine notwendige Folge der beiden ersten ist.

Da nämlich alle vier Determinanten dritter Ordnung der Matrix S identisch verschwinden, so folgt aus (5) das gleiche für die drei Funktionen ($F,\ F',\ F''$). Betrachtet man nun speziell die in (4) gegebene Darstellung von F'' durch $f,\ f',\ f''$, so ergibt sich, daſs unter der gemachten Voraussetzung zwischen jenen drei Funktionen die identische Gleichung besteht

$$\mathfrak{c} f + \mathfrak{c}' f' + \mathfrak{c}'' f'' = 0,$$

und hieraus folgt, da nach der Voraussetzung $\mathfrak{c}''$ sicher von Null verschieden ist,

$$f'' = \frac{\mathfrak{c} f + \mathfrak{c}' f'}{\mathfrak{c}''}.$$

Jede Lösung von ($f=0,\ f'=0$) befriedigt also auch die ursprünglichen Gleichungen ($f=0,\ f'=0,\ f''=0$), und da die Umkehrung dieses Satzes selbstverständlich ist, so folgt, daſs in diesem Falle die Äquivalenz besteht

$$(f,\ f',\ f'') \sim (f,\ f').$$

Um die beiden ersten Gleichungen, welche somit allein in Betracht kommen, aufzulösen, schreiben wir sie in der Form

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + (c\,z + d\,u) &= 0 \\ a'x + b'y + (c'z + d'u) &= 0. \end{aligned}$$

Betrachten wir in ihnen x und y als die einzigen Unbekannten, so erhalten wir die vollständige Lösung

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b, & c\,z + d\,u \\ b', & c'z + d'u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}} = \frac{z\begin{vmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{vmatrix} + u\begin{vmatrix} b, & d \\ b', & d' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} c\,z + d\,u, & a \\ c'z + d'u, & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}} = \frac{z\begin{vmatrix} c, & a \\ c', & a' \end{vmatrix} + u\begin{vmatrix} d, & a \\ d', & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}},$$

wo z und u völlig willkürlich bleiben. Ist also die Matrix S vom Range zwei, so ist von den drei Gleichungen eine überflüssig, und von den vier Unbekannten sind zwei durch die beiden übrigen völlig bestimmt; die Lösungen bilden somit eine zweifache Mannigfaltigkeit.

III. Ferner können auſser den Determinanten dritter Ordnung auch alle Determinanten zweiter Ordnung verschwinden, während von den Determinanten erster Ordnung, d. h. von den Elementen selbst mindestens eine von Null verschieden ist. Man sagt dann, das Koeffizienten-

system (S) ist **vom Range Eins.** Alsdann sind von den drei Gleichungen (1) zwei überflüssig.

In der Tat, ist z. B. das erste Element a von Null verschieden, so ist

$$af' - a'f = \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a, & c \\ a', & c' \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a, & d \\ a', & d' \end{vmatrix} u \equiv 0$$

$$af'' - a''f = \begin{vmatrix} a, & b \\ a'', & b'' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a, & c \\ a'', & c'' \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a, & d \\ a'', & d'' \end{vmatrix} u \equiv 0,$$

d. h. es ist

$$f' = \frac{a'}{a} f, \qquad f'' = \frac{a''}{a} f;$$

die beiden Gleichungen $f' = 0$, $f'' = 0$ sind somit überflüssig, oder es besteht die Äquivalenz

$$(f, f', f'') \sim (f).$$

Aus der Auflösung der somit allein zu betrachtenden ersten Gleichung $f = 0$ ergibt sich aber

$$x = -\frac{by + cz + du}{a},$$

während y, z, u völlig willkürlich sind. Da hier also die Lösungen noch drei unabhängige Variablen enthalten, so bilden sie eine dreifache Mannigfaltigkeit.

IV. Sind endlich auch alle Elemente von S selbst gleich Null, ist also, wie man sich ausdrückt, das System **vom Range Null**, so beschränken die Gleichungen die Variabilität von (x, y, z, u) gar nicht; alle drei Gleichungen sind überflüssig, die Lösungen bilden eine vierfache Mannigfaltigkeit.

Das Gesamtresultat dieser Untersuchung kann man also in dem folgenden Satze zusammenfassen:

> Ist r der Rang der aus den Gleichungskoeffizienten gebildeten Matrix, so wird die vierfache Mannigfaltigkeit der Variablen (x, y, z, u) durch die Forderung des Verschwindens der drei linearen homogenen Funktionen (f, f', f'') auf eine $(4 - r)$-fache herabgemindert, und das System (f, f', f'') ist einem Systeme von nur r unter ihnen äquivalent.

Aus diesem Resultate können nun leicht die Ergebnisse für drei nicht homogene Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \\ f' &= a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ f'' &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{aligned}$$

abgeleitet werden. Hierzu führt die folgende einfache Überlegung: Außer dem vorher betrachteten Systeme (a, b, c, d) aller Gleichungskoeffizienten wollen wir noch das System (a, b, c) der neun Koeffizienten von x, y, z in jenen drei Gleichungen betrachten und ihren Rang beziehlich durch

$$R(a, b, c, d) \quad \text{und} \quad R(a, b, c)$$

bezeichnen. Ist nun zunächst der Rang beider Systeme gleich, ist also

$$R(a, b, c, d) = R(a, b, c),$$

so kann wörtlich dieselbe Überlegung durchgeführt werden wie vorher, nur muß in dem gefundenen Resultate natürlich $u = 1$ gesetzt werden.

Ist jener gemeinsame Rang nämlich zuerst gleich Drei, so ist $|a, b, c| \gtrless 0$, und man erhält genau wie vorher als einzige Lösung

$$(8) \qquad x:y:z:1 = -|b, c, d| : |c, d, a| : -|d, a, b| : |a, b, c|.$$

Ist der gemeinsame Rang beider Systeme gleich Zwei, ist also mindestens eine Unterdeterminante zweiter Ordnung von (a, b, c) von Null verschieden, so kann man wieder ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} \gtrless 0$ voraussetzen und erhält durch dieselben Überlegungen wie vorher

$$(8a) \qquad x = \frac{z|b, c| + |b, d|}{|a, b|}, \qquad y = \frac{z|c, a| + |d, a|}{|a, b|},$$

während z ganz willkürlich bleibt; man hat also eine einfache Mannigfaltigkeit von Lösungen.

Ist der gemeinsame Rang gleich Eins, und nimmt man wie vorher $a \gtrless 0$ an, so sind die zweite und die dritte Gleichung überflüssig, und aus der ersten folgt als allgemeine Lösung

$$(8b) \qquad x = -\frac{by + cz + d}{a},$$

d. h. es existiert eine zweifache Mannigfaltigkeit von Lösungen.

In dem selbstverständlichen Falle endlich, daß der Rang von (a, b, c, d), also auch der von (a, b, c) gleich Null ist, erhält man eine dreifache Mannigfaltigkeit von Lösungen, da jedes Wertsystem diese identisch verschwindenden Gleichungen befriedigt.

Ist dagegen der Rang von (a, b, c) kleiner als der von (a, b, c, d), d. h. ist

$$R(a, b, c) < R(a, b, c, d),$$

so zeigt man leicht, daß jene drei Gleichungen überhaupt nicht durch endliche Werte von (x, y, z) befriedigt werden können. Man kann nämlich in diesem Falle drei Zahlen r, r', r'' so finden, daß für variable x, y, z

$$rf + r'f' + r''f'' = 1$$

ist. Damit das nämlich der Fall sei, müssen r, r', r'' die vier Gleichungen befriedigen

$$\begin{aligned} ra + r'a' + r''a'' &= 0 \\ rb + r'b' + r''b'' &= 0 \\ rc + r'c' + r''c'' &= 0 \\ rd + r'd' + r''d'' &= 1. \end{aligned}$$

Von den drei ersten Gleichungen ist aber mindestens eine, etwa die erste, überflüssig, weil der Rang des Koeffizientensystemes (a, b, c) kleiner ist als drei; und wir zeigten schon früher, daſs es stets möglich ist, der vierten Gleichung in Verbindung mit zwei von den anderen homogenen Gleichungen zu genügen, da wegen $R(a, b, c) < R(a, b, c, d)$ nicht alle Elemente d, d', d'' verschwinden können.

Denkt man sich aber r, r', r'' so bestimmt, daſs

$$rf + r'f' + r''f'' = 1$$

ist, so folgt sofort, daſs kein endliches Wertsystem (x, y, z) jenen drei Gleichungen genügen kann, da ja für dieses $r.0 + r'.0 + r''.0 = 1$ sein müſste. Ist also $R(a, b, c) < R(a, b, c, d)$, so besitzt das Gleichungssystem $(f = 0,\ f' = 0,\ f'' = 0)$ keine endliche Lösung. Man erhält somit das wichtige Ergebnis:

> Drei nicht homogene lineare Gleichungen mit drei Unbekannten
>
> $$f = ax + by + cz + d = 0$$
> $$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
>
> besitzen dann und nur dann überhaupt endliche Lösungen, wenn
>
> $$R(a, b, c) = R(a, b, c, d)$$
>
> ist. Ist dann r der gemeinsame Rang jener beiden Koeffizientensysteme, so sind jene drei Gleichungen äquivalent einem Systeme von nur r unter ihnen, und ihre Lösungen bilden eine $(3 - r)$-fache Mannigfaltigkeit.

Nimmt man speziell $d = d' = d'' = 0$, betrachtet man also die drei homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z = 0 \\ f' &= a'x + b'y + c'z = 0 \\ f'' &= a''x + b''y + c''z = 0, \end{aligned}$$

so besitzen diese dann und nur dann eine Lösung auſser der trivialen

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,$$

wenn ihre Determinante $|a, b, c|$ verschwindet; ist nämlich $|a, b, c| \gtrless 0$, so folgt aus (6) $(x = y = z = 0)$ als einzige Lösung. Ist aber $|a, b, c| = 0$, so ist von jenen drei Gleichungen mindestens eine überflüssig, und wir zeigten schon früher, daſs die beiden übrigbleibenden homogenen Gleichungen stets eine von Null verschiedene Lösung haben. Es mag beiläufig erwähnt werden, daſs aus dieser Bemerkung leicht ein neuer Beweis des Multiplikationssatzes erschlossen werden kann.

Betrachtet man wieder (x, y, z) als die Koordinaten eines Punktes im Raume, bezogen auf ein rechtwinkliges oder schiefwinkliges Koordinatensystem, so wird in der analytischen Geometrie gelehrt, daſs die Lösungen einer nicht homogenen linearen Gleichung $f = 0$ die sämtlichen Punkte einer ganz bestimmten Ebene E erfüllen. Man nennt deshalb $f = 0$ die Gleichung von E. Sucht man also die gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen $(f = 0,\ f' = 0,\ f'' = 0)$, so heiſst das geometrisch gesprochen, man soll alle jenen drei Ebenen gemeinsamen Punkte, d. h. man soll ihre Schnittfigur bestimmen. Ersetzt man jenes Gleichungssystem durch ein äquivalentes $(F = 0,\ F' = 0,\ F'' = 0)$, so besitzt dies dieselben Lösungen, d. h.:

> Zwei äquivalente Systeme linearer Gleichungen entsprechen zwei Systemen von Ebenen, welche dieselbe Schnittfigur besitzen.

Ist nun zunächst $R(a, b, c, d) = R(a, b, c) = 3$, so kann das Gleichungssystem durch ein äquivalentes ersetzt werden, dessen erste Gleichung nur x, die zweite nur y, die dritte nur z enthält, und deren Auflösung unmittelbar auf die Proportion (8) führt. Die durch jene Gleichungen dargestellten Ebenen gehen aber alle durch den gesuchten Schnittpunkt und sind beziehlich der YZ-, der ZX- und der XY-Ebene parallel; aus ihren Gleichungen kann der gesuchte Schnittpunkt sofort gefunden werden.

> Ist also $R(a, b, c, d) = R(a, b, c) = 3$, so schneiden sich jene drei Ebenen in einem im Endlichen liegenden Punkte, dessen Koordinaten durch die Proportion gegeben sind
>
> $$x:y:z:1 = -|b, c, d|:|c, d, a|:-|d, a, b|:|a, b, c|.$$

Ist dagegen $R(a, b, c, d) = 3$, aber $R(a, b, c) < 3$, d. h. ist $|a, b, c| = 0$, so erkennt man durch Grenzbetrachtungen leicht, daſs mit unbegrenzt abnehmendem $|a, b, c|$ der eindeutig bestimmte Schnittpunkt der drei Ebenen ins Unendliche rückt, aber so, daſs seine Koordinaten x, y, z in dem völlig bestimmten Verhältnis

$$-|b, c, d| : |c, d, a| : -|d, a, b|$$

stehen. Alle drei Ebenen sind dann einer und derselben Geraden durch den Anfangspunkt parallel; ihr Schnittpunkt ist ein ganz bestimmter, aber im Unendlichen liegender Punkt.

Ist $R(a, b, c, d) = 2$, so ist eine der drei Gleichungen (7) überflüssig. Ist dies für $f'' = 0$ der Fall, so geht E'' durch die Schnittfigur von E und E'. Ist auch $R(a, b, c) = 2$, so besitzen jene beiden Ebenen eine einfache Mannigfaltigkeit im Endlichen liegender gemeinsamer Punkte, d. h. alle drei Ebenen schneiden sich in derselben geraden Linie, deren Gleichungen in (8a) gegeben sind. Ist dagegen $R(a, b, c, d) = 2$, aber $R(a, b, c) < 2$, so besitzen jene beiden Ebenen E und E' keine im Endlichen liegende Schnittlinie, dieselbe rückt vielmehr ins Unendliche; jene beiden Ebenen E und E' und somit auch die dritte E'' sind in diesem Falle parallel, ohne aber in eine einzige Ebene zusammenzufallen.

Ist endlich $R(a, b, c, d) = 1$, so sind zwei der Gleichungen überflüssig; alle drei Ebenen fallen also aufeinander. Ist zugleich $R(a, b, c) = 1$, so liegen diese drei zusammenfallenden Ebenen im Endlichen, ist dagegen $R(a, b, c) = 0$, so liegen sie im Unendlichen.

Elfte Vorlesung.

Anwendung der Determinanten dritter Ordnung auf die analytische Geometrie der Ebene. — Die homogenen Punktkoordinaten. — Die Gleichung der geraden Linie in homogenen Koordinaten. — Bestimmung des Dreiecksinhaltes aus den homogenen Koordinaten der Dreiecksecken. — Die Gleichung des Kegelschnittes, welcher durch fünf gegebene Punkte geht. — Die homogenen Linienkoordinaten. — Die Gleichung des Punktes in homogenen Linienkoordinaten. — Die Relation zwischen den drei homogenen Koordinaten einer geraden Linie. — Die Gleichung des Kreises in homogenen Linienkoordinaten.

§ 1.

Die Determinanten dritter Ordnung liefern ein Mittel, um die Auflösung von zwei homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten in sehr eleganter und für die analytische Geometrie besonders brauchbarer Form zu geben.

Durch zwei homogene Gleichungen für drei Unbekannte

$$\begin{aligned} f &= a\,x + b\,y + c\,z = 0 \\ f' &= a'x + b'y + c'z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

deren Koeffizientensystem vom Range zwei ist, sind die Verhältnisse der Unbekannten eindeutig, diese selbst also bis auf eine multiplikative Konstante λ bestimmt. Daher ist auch eine jede lineare Funktion

$$F = ux + vy + wz, \tag{1a}$$

deren Koeffizienten u, v, w beliebig gegebene Konstanten sind, bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, wenn x, y, z den beiden Gleichungen (1) genügen sollen. Anstatt also x, y, z einzeln zu berechnen, kann man sich gleich die Aufgabe stellen, den Wert dieser linearen Form F für unbestimmte u, v, w zu finden; alsdann kann man aus ihm die einzelnen Unbekannten durch Spezialisierung bestimmen.

Der Wert dieser Funktion F kann nun folgendermaßen als Determinante dritter Ordnung geschrieben werden

$$F = \lambda \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ u, & v, & w \end{vmatrix} = \lambda(u\,|b, c| + v\,|c, a| + w\,|a, b|), \tag{2}$$

wo λ eine willkürliche Konstante bedeutet; denn diese Determinante ist homogen und linear in den Elementen u, v, w und verschwindet identisch, sobald (u, v, w) beziehlich gleich (a, b, c) oder gleich (a', b', c') gesetzt wird.

Vergleicht man diese Darstellung von F mit der in (1a) gegebenen, so erhält man durch Koeffizientenvergleichung auf einmal die vollständige Auflösung der beiden Gleichungen (1) in der Form

$$(3) \qquad x = \lambda \begin{vmatrix} b, & c \\ b', & c' \end{vmatrix}, \quad y = \lambda \begin{vmatrix} c, & a \\ c', & a' \end{vmatrix}, \quad z = \lambda \begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}.$$

Sucht man nun den Wert einer nicht homogenen Funktion der beiden Variablen x und y

$$\bar{F} = ux + vy + w$$

unter der Voraussetzung, daſs x und y durch zwei lineare Gleichungen

$$(4) \qquad ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

eindeutig bestimmt sind, so kann diese Frage unmittelbar auf die soeben gelöste reduziert werden.

In der Tat genügt $\bar{F}$, als Funktion von (u, v, w) betrachtet, genau denselben Bedingungen, wie F in (2), jedoch ist der dort auftretende willkürliche Faktor λ hier so zu bestimmen, daſs der Koeffizient von w gleich Eins wird. Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$(5) \qquad \bar{F} = \frac{\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ u, & v, & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}} = u \frac{|b, c|}{|a, b|} + v \frac{|c, a|}{|a, b|} + w,$$

und durch Koeffizientenvergleichung erhält man die bereits früher gefundene vollständige Lösung der Gleichungen (4)

$$(6) \qquad x = \frac{|b, c|}{|a, b|}, \quad y = \frac{|c, a|}{|a, b|}.$$

Wir wollen das erste der hier abgeleiteten Resultate zur Bestimmung der Gleichung einer durch zwei Punkte 1 und 2 gehenden geraden Linie benützen. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ihre Koordinaten, während x, y die laufenden Koordinaten der Geraden sind, so kann nach (2) jene Gleichung folgendermaſsen in Determinantenform geschrieben werden

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} = 0;$$

denn diese Gleichung ist linear in (x, y), und sie wird erfüllt, sobald diese Variablen durch die Koordinaten eines der beiden Punkte 1 und 2 ersetzt werden.

Der Punkt p, dessen Koordinaten (x, y) sind, liegt somit dann und nur dann auf der Geraden $\overline{1, 2}$, wenn die Determinante (7) verschwindet. Ist nun ein Punkt 3 beliebig in der Ebene angenommen, und setzt man seine Koordinaten (x_3, y_3) in die Determinante auf der linken Seite von (7) ein, so besitzt diese, falls die Punkte 1, 2, 3 nicht in gerader Linie liegen, einen von Null verschiedenen Wert, und aus der Darstellung dieser Determinante in der Form

$$\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x_3, & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3, & y_3 \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix}$$

ergibt sich mit Benutzung von (1a) auf S. 32, dafs sie dem doppelten Inhalte des Dreiecks $\overline{1, 2, 3}$ gleich ist, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem die Umlaufsrichtung (1, 2, 3) die positive oder negative ist. Der Einfachheit wegen soll im folgenden der Wert dieser Determinante mit (1, 2, 3) bezeichnet werden.

Hieraus folgt unmittelbar, dafs alle Punkte 3, deren Koordinaten x, y die Gleichung

$$(1, 2, 3) = c \tag{8}$$

befriedigen, auf einer Parallelen zu der Geraden $\overline{1, 2}$ liegen, welche durch die positive oder negative Konstante c eindeutig bestimmt ist.

§ 2.

Wenn man in der analytischen Geometrie der Untersuchung ein gewöhnliches rechtwinkliges oder schiefwinkliges Koordinatensystem zu Grunde legt, so zeigen die durchzuführenden Rechnungen und die Endresultate einen gewissen Mangel an Symmetrie, welcher die Übersicht und Einsicht erschwert. Das erste und einfachste Beispiel hierfür bietet der im vorigen Abschnitt gefundene Determinantenausdruck für den doppelten Dreiecksinhalt; in ihm ist die erste Kolonne von den beiden letzten verschieden gebildet.

Um diesen Übelstand zu vermeiden, hat man in der analytischen Geometrie eine neue Art der Koordinatenbestimmung eingeführt, welche wir zunächst kurz auseinandersetzen wollen.

Wir legen der Untersuchung drei gerade Linien I, II, III, die sogenannten F u n d a m e n t a l l i n i e n zu Grunde, von welchen nur an-

genommen werden soll, daſs sie nicht durch einen und denselben Punkt gehen und daſs nicht eine einer anderen parallel ist. Ihre Schnittpunkte seien mit 1, 2, 3 und zwar so bezeichnet, daſs der Punkt 1 der Fundamentallinie I gegenüberliegt u. s. w. Die Eckpunkte 1, 2, 3 des durch die drei Fundamentallinien gebildeten sogenannten **Fundamentaldreiecks** mögen in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Achsensystem die Koordinaten (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) haben. — Ist dann p ein beliebig gegebener Punkt (siehe Fig. 7) und sind (x, y) seine Koordinaten, so ist derselbe eindeutig bestimmt, wenn man die Werte von nur zwei der drei Determinanten

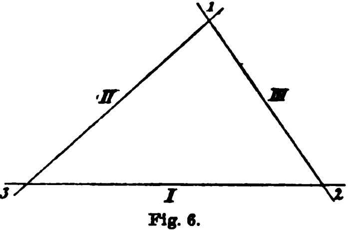


Fig. 6.

$$(1)\quad (p,2,3)=\begin{vmatrix}1, & x, & y\\ 1, & \xi_2, & \eta_2\\ 1, & \xi_3, & \eta_3\end{vmatrix},\ (p,3,1)=\begin{vmatrix}1, & x, & y\\ 1, & \xi_3, & \eta_3\\ 1, & \xi_1, & \eta_1\end{vmatrix},\ (p,1,2)=\begin{vmatrix}1, & x, & y\\ 1, & \xi_1, & \eta_1\\ 1, & \xi_2, & \eta_2\end{vmatrix}$$

kennt, denn durch jede von ihnen wird eine Parallele zu einer der drei Fundamentallinien bestimmt, und durch den Durchschnitt je zweier Parallelen ist ja der Punkt p eindeutig gegeben. Durch den Wert von nur zwei unter diesen Determinanten muſs also der der dritten eindeutig bestimmt sein. Dies kann man analytisch sofort nachweisen und auch die zwischen jenen Determinanten bestehende Relation finden. Da dieselben nämlich lineare Funktionen von x und y sind, so besteht zwischen ihnen notwendig eine lineare Relation von der Form

$$l(p, 2, 3) + m(p, 3, 1) + n(p, 1, 2) = c,$$

wo l, m, n, c noch zu bestimmende Konstanten sind. Um diese Konstanten zu finden, lassen wir den bis jetzt ganz beliebig angenommenen Punkt p successive mit jedem der drei Fundamentalpunkte 1, 2, 3 zusammenfallen. In den drei so sich ergebenden Gleichungen sind dann jedesmal zwei von den drei Determinanten $(p, 2, 3)$, $(p, 3, 1)$, $(p, 1, 2)$ gleich Null, weil die zugehörigen Dreiecksinhalte verschwinden; dagegen wird die dritte gleich $(1, 2, 3)$, d. h. gleich dem doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks, welcher ja von Null verschieden ist. Den drei so sich ergebenden Gleichungen

$$l(1, 2, 3) = m(1, 2, 3) = n(1, 2, 3) = c,$$

durch welche das Verhältnis der vier Konstanten eindeutig bestimmt wird, genügt man aber, wenn man

$$l = m = n = 1, \qquad c = (1, 2, 3)$$

setzt. Die gesuchte Determinantenrelation lautet also folgendermaſsen

$$(2)\qquad (p, 2, 3) + (p, 3, 1) + (p, 1, 2) = (1, 2, 3).$$

Liegt der Punkt p innerhalb des Fundamentaldreiecks, so ist die Richtigkeit dieser Gleichung unmittelbar einleuchtend, denn sie sagt dann aus, daſs die Summe der drei Dreiecksinhalte $\overline{p,2,3}$, $\overline{p,3,1}$, $\overline{p,1,2}$ gleich dem Fundamentaldreiecke, und daſs die Umlaufsrichtung in allen dieselbe ist. Geometrisch gesprochen läſst sich der Inhalt der Relation so ausdrücken, daſs die algebraische Summe der Inhaltsdeterminanten links gleich der Inhaltsdeterminante des Fundamentaldreiecks ist, wo auch der Punkt p innerhalb oder auſserhalb des Fundamentaldreiecks angenommen werde.

Fig. 7.

Die Relation (2) können wir in der Form schreiben

$$\frac{(p,2,3)}{(1,2,3)}+\frac{(p,3,1)}{(1,2,3)}+\frac{(p,1,2)}{(1,2,3)}=1. \tag{2a}$$

Dann wollen wir die auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden Quotienten als die homogenen Koordinaten des Punktes p einführen, und zwar wollen wir

$$u_p=\frac{(p,2,3)}{(1,2,3)},\quad v_p=\frac{(p,3,1)}{(1,2,3)},\quad w_p=\frac{(p,1,2)}{(1,2,3)} \tag{3}$$

setzen. Die homogenen Koordinaten sind dann ihrem absoluten Werte nach beziehlich dem Verhältnis der drei durch p bestimmten Dreiecke $\overline{p,2,3}$, $\overline{p,3,1}$, $\overline{p,1,2}$ zu dem Inhalt des Fundamentaldreiecks gleich, und jede gibt durch ihr Vorzeichen an, ob die Umlaufsrichtung des entsprechenden Dreiecks mit der des Fundamentaldreiecks übereinstimmt oder nicht.*) Von diesen drei Zahlen bestimmen schon zwei die Lage des Punktes p eindeutig, während die dritte mit den beiden anderen durch die aus (2a) folgende Gleichung

$$u_p+v_p+w_p=1 \tag{4}$$

zusammenhängt. Die drei Zahlen (u_p, v_p, w_p) sind für alle Punkte innerhalb des Fundamentaldreiecks positive echte Brüche, da alsdann die Vorzeichen der drei Determinanten im Zähler von (3) mit dem der Determinante (1, 2, 3) übereinstimmen und die Summe der drei Koordinaten gleich Eins ist. Überschreitet aber der Punkt p eine der Fundamentallinien, so wird die zugehörige Koordinate offenbar negativ. Durch die drei Fundamentallinien wird die Ebene im ganzen in sieben Felder zerlegt, welche durch die Vorzeichen der homogenen Koordinaten ihrer Punkte eindeutig charakterisiert werden. Während nämlich für jeden Punkt innerhalb des Achsendreiecks alle drei Koordinaten positiv

*) Oder, was dasselbe ist, es ist z. B. u_p positiv oder negativ, je nachdem der Punkt p und der Fundamentalpunkt 1 auf derselben Seite der Fundamentallinie I liegen oder nicht.

sind, haben die Punkte, welche in einem der drei Scheitelwinkel des Achsendreiecks liegen, zwei negative und eine positive Koordinate; hingegen ist für die den Dreiecksseiten anliegenden Felder immer nur einer der drei Quotienten negativ. Ausgeschlossen ist mithin, daſs alle drei Koordinaten negativ werden können; sonst könnte ja auch nicht für jeden Punkt p die Relation $u_p + v_p + w_p = 1$ bestehen. Fällt p mit dem ersten, zweiten oder dritten Fundamentalpunkte zusammen, so sind die Koordinaten von p offenbar beziehlich

$$(1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 1,\ 0),\quad (0,\ 0,\ 1). \tag{5}$$

Die homogenen Koordinaten (u_p, v_p, w_p) eines Punktes p können geometrisch in sehr verschiedener Weise definiert werden. Bezeichnet man z. B. die senkrechten Abstände eines Punktes p von den drei Fundamentallinien I, II, III beziehlich durch (p, I), (p, II), (p, III) und die Seitenlängen des Achsendreiecks durch $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$ und beachtet man, daſs z. B. die beiden Dreiecke $(p, 2, 3)$ und $(1, 2, 3)$ dieselbe Grundlinie $\overline{2, 3}$ besitzen, daſs sich also ihre Inhalte wie die Höhen (p, I) und $(1, \mathrm{I})$ verhalten, so ergibt sich für u_p der Ausdruck

$$u_p = \frac{(p,\ 2,\ 3)}{(1,\ 2,\ 3)} = \frac{(p,\ \mathrm{I})}{(1,\ \mathrm{I})}.$$

Dieses Verhältnis hat das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die beiden Punkte p und 1 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Fundamentallinie I liegen, je nachdem also die Richtungen von (p, I) und $(1, \mathrm{I})$ gleich oder entgegengesetzt sind. An Stelle der senkrechten Abstände hätte man, was hier beiläufig erwähnt werden mag, für $(1, \mathrm{I})$ und (p, I) auch die Abstände jener Punkte von der Achse I, gemessen auf irgend zwei durch 1 und p gezogenen Parallelen, wählen können, da ja ihr Verhältnis dem der senkrechten Abstände gleich ist.

Da sich nun für die beiden anderen Koordinaten v_p und w_p ganz analoge Ausdrücke ergeben, so erhält man die folgende Darstellung für die homogenen Koordinaten des Punktes p

$$u_p = \frac{(p,\ \mathrm{I})}{(1,\ \mathrm{I})},\quad v_p = \frac{(p,\ \mathrm{II})}{(2,\ \mathrm{II})},\quad w_p = \frac{(p,\ \mathrm{III})}{(3,\ \mathrm{III})}. \tag{6}$$

Es bedeuten also die homogenen Koordinaten eines Punktes p auch die mit den richtigen Vorzeichen genommenen Verhältnisse seiner Abstände von den drei Achsen zu den zugehörigen Höhen des Achsendreiecks. Die zwischen den Koordinaten bestehende identische Relation (4) geht jetzt über in

$$\frac{(p,\ \mathrm{I})}{(1,\ \mathrm{I})} + \frac{(p,\ \mathrm{II})}{(2,\ \mathrm{II})} + \frac{(p,\ \mathrm{III})}{(3,\ \mathrm{III})} = 1.$$

Jede gerade Linie P teilt die ganze Ebene in zwei getrennte Halbebenen. Wir wollen diese beiden Seiten der Geraden als die positive und die negative voneinander unterscheiden, und wollen den Abstand eines Punktes p von jener Geraden mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen, je nachdem er auf der positiven oder negativen Seite von P liegt. Welche von jenen beiden Seiten wir als die positive bezeichnen wollen, ist vollständig beliebig. Für die drei Fundamentallinien wollen wir jene Bestimmung so getroffen denken, daſs das Innere des Fundamentaldreiecks stets auf der positiven Seite liegt. Dann sind die Abstände (1, I), (2, II), (3, III) sämtlich positive Zahlen, und die einzelnen Koordinaten (u_p, v_p, w_p) eines Punktes sind positiv oder negativ, je nachdem p auf der positiven oder negativen Seite der betreffenden Fundamentallinie liegt.

§ 3.

Während man die homogenen Koordinaten (u_p, v_p, w_p) eines Punktes p, wie im vorigen Abschnitte dargelegt wurde, in sehr verschiedener Weise geometrisch interpretieren kann, sind sie analytisch betrachtet nichts anderes als drei lineare Funktionen der rechtwinkligen Koordinaten (x, y) von p

$$\begin{aligned} u_p &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ v_p &= a_2 x + b_2 y + c_2 \\ w_p &= a_3 x + b_3 y + c_3, \end{aligned} \tag{1}$$

deren Determinante $|a_i, b_i, c_i|$ von Null verschieden ist, und deren neun Koeffizienten von der Lage des Achsendreiecks abhängen und der Bedingung

$$u_p + v_p + w_p = 1 \tag{1a}$$

genügen. Man kann daher die Gröſsen x, y und mit Hilfe von (1a) auch die Zahl 1 homogen und linear durch (u_p, v_p, w_p) ausdrücken. Aus der Auflösung von (1) und aus (1a) ergeben sich also drei Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 u_p + \beta_1 v_p + \gamma_1 w_p \\ y &= \alpha_2 u_p + \beta_2 v_p + \gamma_2 w_p \\ 1 &= u_p + v_p + w_p. \end{aligned} \tag{2}$$

Hieraus folgt, daſs die Gleichung einer jeden algebraischen Kurve $f(x, y) = 0$ durch Einführung der Koordinaten u_p, v_p, w_p homogen gemacht werden kann, und diesem Umstande verdanken die homogenen Koordinaten ihren Namen. Stellt nämlich $f(x, y) = 0$ eine

algebraische Kurve vom n^{ten} Grade dar, so ist ihre linke Seite eine Summe von lauter Gliedern

$$f(x, y) = \sum_{l, m} a_{l, m} x^l y^m,$$

für welche die Summe $l + m \leq n$ ist. Schreibt man also $f(x, y)$ in der Form

$$f(x, y) = \Sigma a_{l, m} x^l y^m . (1)^{n-(l+m)}$$

und führt dann an Stelle von $x, y, 1$ ihre Ausdrücke (2) durch die homogenen Koordinaten (u_p, v_p, w_p) ein, so erhält man offenbar einen Ausdruck von der Form

$$F(u_p, v_p, w_p) = \Sigma A_{\lambda, \mu, \nu} u_p^\lambda v_p^\mu w_p^\nu,$$

in welchem die Dimension $(\lambda + \mu + \nu)$ jedes Summanden dieselbe und zwar gleich n ist.

So mufs z. B. die homogene Gleichung jeder geraden Linie von der Form sein

$$A u_p + B v_p + C w_p = 0.$$

Wir wollen dieses Resultat benützen, um die homogene Gleichung der geraden Linie aufzustellen, welche durch zwei beliebig gegebene Punkte 4 und 5 mit den Koordinaten (u_4, v_4, w_4) und (u_5, v_5, w_5) hindurchgeht. Diese Gleichung kann folgendermaßen in Determinantenform geschrieben werden

$$\begin{vmatrix} u_4, & v_4, & w_4 \\ u_5, & v_5, & w_5 \\ u_p, & v_p, & w_p \end{vmatrix} = 0; \tag{3}$$

denn dieselbe ist homogen und linear in u_p, v_p, w_p und ist offenbar erfüllt, wenn der Punkt p mit einem der beiden Punkte 4 oder 5 zusammenfällt. Addiert man in dieser Determinante die beiden ersten Kolonnen zur letzten, so werden alle Elemente derselben nach (2) gleich 1, und man erhält die folgende Darstellung der gesuchten Gleichung in nicht homogener Form

$$\begin{vmatrix} u_4, & v_4, & 1 \\ u_5, & v_5, & 1 \\ u_p, & v_p, & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3a}$$

Sind (u_6, v_6, w_6) die Koordinaten eines dritten festen Punktes 6, so wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_4, & v_4, & w_4 \\ u_5, & v_5, & w_5 \\ u_6, & v_6, & w_6 \end{vmatrix} \tag{4}$$

nach (3) dann und nur dann verschwinden, wenn die drei Punkte 4, 5, 6 in gerader Linie liegen.

Es liegt jetzt nahe, nach der Bedeutung dieser Determinante zu fragen, für den Fall, daſs 4, 5, 6 drei ganz beliebig in der Ebene angenommene Punkte sind. Sind nun (x_4, y_4), (x_5, y_5), (x_6, y_6) die rechtwinkligen Koordinaten der drei Punkte 4, 5, 6, und ersetzt man in der Determinante (4) die homogenen Koordinaten vermittelst der Gleichungen (1) durch ihre Ausdrücke in den rechtwinkligen Koordinaten, so erhält man

$$|u_i, v_i, w_i| = |a_1 x_i + b_1 y_i + c_1, \ a_2 x_i + b_2 y_i + c_2, \ a_3 x_i + b_3 y_i + c_3|,$$

und hieraus ergibt sich unter Anwendung des Multiplikationssatzes

$$\begin{vmatrix} u_4, & v_4, & w_4 \\ u_5, & v_5, & w_5 \\ u_6, & v_6, & w_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_4, & y_4, & 1 \\ x_5, & y_5, & 1 \\ x_6, & y_6, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} = (4, 5, 6) \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Um nun noch die Substitutionsdeterminante auf der rechten Seite dieser Gleichung zu bestimmen, lassen wir die bis jetzt ganz willkürlich angenommenen Punkte 4, 5, 6 bezw. mit den Eckpunkten 1, 2, 3 des Fundamentaldreiecks zusammenfallen. Da alsdann die Determinante $|u_i, v_i, w_i|$ nach (5) des vorigen Abschnittes in

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 1$$

übergeht, so ergibt sich zur Bestimmung jener Substitutionsdeterminante die Gleichung

$$1 = (1, 2, 3) \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix};$$

dieselbe ist also dem reziproken Werte von (1, 2, 3) gleich. Hieraus folgt für die gesuchte Determinante (4) die Gleichung

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} u_4, & v_4, & w_4 \\ u_5, & v_5, & w_5 \\ u_6, & v_6, & w_6 \end{vmatrix} = \frac{(4, 5, 6)}{(1, 2, 3)},$$

sie ist demnach gleich dem Verhältnisse des Dreiecks (4, 5, 6) zum Achsendreieck, positiv oder negativ genommen, je nachdem der Umlaufssinn jener beiden Dreiecke derselbe oder der entgegengesetzte ist.

Bedeuten wieder u_p, v_p, w_p die Koordinaten eines beliebigen Punktes p, so stellt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} u_4, & v_4, & w_4 \\ u_5, & v_5, & w_5 \\ u_p, & v_p, & w_p \end{vmatrix} = c = c(u_p + v_p + w_p)$$

nach (8) auf S. 182 eine ganz bestimmte Parallele zu der durch 4 und 5 gelegten Geraden dar, da sie auch in der Form

$$(4, 5, p) = c \cdot (1, 2, 3) = C$$

geschrieben werden kann. Speziell stellen die drei Gleichungen

$$u_p = \text{const}, \qquad v_p = \text{const}, \qquad w_p = \text{const}$$

Parallelen bezw. zur ersten, zweiten oder dritten Achse dar, während die Achsen oder die Fundamentallinien selbst durch

$$u_p = 0, \qquad v_p = 0, \qquad w_p = 0$$

charakterisiert sind.

Als zweite Anwendung der homogenen Koordinaten wollen wir die Gleichung des durch fünf gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5 hindurchgehenden Kegelschnittes aufsuchen. Schreibt man die Gleichung eines Kegelschnittes in homogenen Koordinaten, so wird ihre linke Seite eine homogene Funktion der Koordinaten u_p, v_p, w_p von der zweiten Dimension. Kann man also eine solche Funktion bestimmen, welche für fünf gegebene Wertsysteme von u_p, v_p, w_p verschwindet, so stellt sie, gleich Null gesetzt, den gesuchten Kegelschnitt dar, da dieser im allgemeinen durch fünf seiner Punkte eindeutig bestimmt ist.

Eine solche Gleichung kann aber leicht gebildet werden. Es seien allgemein

$$u_i, \ v_i, \ w_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

die homogenen Koordinaten der fünf gegebenen Punkte, bezogen auf ein beliebiges Koordinatendreieck, und u_p, v_p, w_p die Koordinaten eines beliebigen Punktes. Setzt man dann zur Abkürzung

$$[p, 1, 2] = \begin{vmatrix} u_p, & v_p, & w_p \\ u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \end{vmatrix}$$

und bezeichnet die anderen ähnlich gebildeten Determinanten entsprechend, so stellt die Gleichung

$$(6) \qquad \lambda [p, 1, 2][p, 3, 4] - \mu [p, 1, 3][p, 2, 4] = 0$$

offenbar für jeden Wert der Parameter λ und μ einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Punkte 1, 2, 3, 4 hindurchgeht; denn die linke Seite ist in den laufenden Koordinaten von p vom zweiten Grade, und die Gleichung ist erfüllt, sobald man p mit einem jener vier Punkte zusammenfallen läßt, weil alsdann in jedem der beiden Produkte ein Faktor verschwindet. Soll nun der Kegelschnitt auch durch den letzten Punkt 5 hindurchgehen, so ist das Verhältnis $\frac{\lambda}{\mu}$ so zu bestimmen, daß

$$\lambda[5, 1, 2][5, 3, 4] = \mu[5, 1, 3][5, 2, 4]$$

wird, und wenn man den so gefundenen Wert von $\frac{\lambda}{\mu}$ in die obige Gleichung einsetzt, so ergibt sich für die Gleichung des gesuchten Kegelschnittes der folgende elegante Ausdruck

$$(6a) \qquad \frac{[p, 1, 2][p, 3, 4]}{[5, 1, 2][5, 3, 4]} = \frac{[p, 1, 3][p, 2, 4]}{[5, 1, 3][5, 2, 4]}.$$

Die hier benützte Methode wird in neuerer Zeit in der analytischen Geometrie vielfach angewendet.

Will man die Gleichung des Kegelschnittes in rechtwinkligen Koordinaten haben, so genügt es, die Determinanten $[p, 1, 2]$ u. s. w. durch die entsprechenden Determinanten $(p, 1, 2) = \begin{vmatrix} x_p, & y_p, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix}$ u. s. w. zu ersetzen, da sich diese von jenen nach (5) nur durch den reziproken Wert der Inhaltsdeterminante des Fundamentaldreiecks unterscheiden, welche sich in der Gleichung von selbst forthebt.

§ 4.

In der Ebene steht dem Punkte die Gerade in der Weise gegenüber, daſs im allgemeinen aus jeder Beziehung zwischen einer Anzahl von Punkten eine entsprechende zwischen einer gleichen Anzahl von geraden Linien entspricht. Aus diesem Grunde ist es zweckmäſsig, den kartesischen oder den homogenen Koordinaten eines Punktes die Linienkoordinaten gegenüberzustellen, und auch hier kann man homogene und nicht homogene Linienkoordinaten der Untersuchung zu Grunde legen. Hierdurch gelangt man zu einer zweifachen geometrischen Interpretation von nicht homogenen Gleichungen mit zwei oder von homogenen Gleichungen mit drei Variablen und gewinnt ein Übertragungsprinzip für geometrische Sätze, welches man als das Prinzip der Dualität bezeichnet hat, und das für die ganze neuere Geometrie von fundamentaler Bedeutung geworden ist.

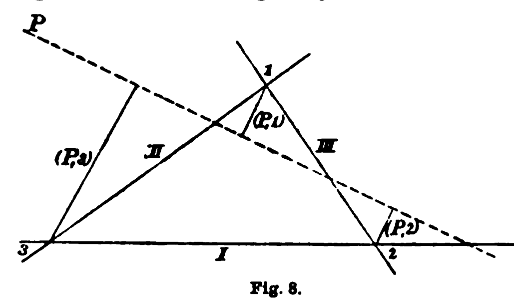


Fig. 8.

Die homogenen Koordinaten einer Geraden kann man ganz analog den Punktkoordinaten folgendermaſsen definieren. Bezeichnet

man wiederum die drei Ecken des Fundamentaldreiecks mit 1, 2, 3, die ihnen gegenüberliegenden Seiten beziehlich durch I, II, III, und ist P irgend eine gerade Linie in der Ebene, so ist ihre Lage eindeutig bestimmt, wenn man ihre kürzesten Entfernungen

$$(P, 1), (P, 2), (P, 3)$$

von den Ecken des Fundamentaldreiecks kennt, da die Gerade P ja die gemeinsame Tangente an die mit jenen Längen als Radien um die drei Eckpunkte beschriebenen Kreise ist.

Führen wir also die Verhältnisse dieser drei Abstände zu den senkrechten Abständen

$$(\mathrm{I}, 1), (\mathrm{II}, 2), (\mathrm{III}, 3)$$

der entsprechenden Dreiecksecken von ihren Gegenseiten als **Koordinaten der Geraden P** ein, setzen wir also

$$(1) \qquad U_P = \frac{(P, 1)}{(\mathrm{I}, 1)}, \quad V_P = \frac{(P, 2)}{(\mathrm{II}, 2)}, \quad W_P = \frac{(P, 3)}{(\mathrm{III}, 3)},$$

so ist die gerade Linie P durch ihre Koordinaten (U_P, V_P, W_P) eindeutig bestimmt. Diese Gleichungen sind völlig analog den in (6) auf S. 185 aufgestellten für die homogenen Koordinaten eines Punktes.

Sind von den drei Koordinaten (1) der Linie P nur zwei, etwa die beiden ersten, gegeben, so ist P bereits als eine der vier gemeinsamen Tangenten an die beiden mit $(P, 1)$ und $(P, 2)$ um 1 und 2 beschriebenen Kreise bestimmt. Auch hier können also die drei homogenen Koordinaten einer Geraden nicht willkürlich angenommen werden, sondern es besteht eine identische Beziehung zwischen ihnen, welche aufzusuchen der Zweck der folgenden Überlegungen ist.

Ist p ein beliebiger Punkt in der Ebene mit den homogenen Koordinaten (u_p, v_p, w_p) und (p, P) sein senkrechter Abstand von der Geraden P, so ist dieser eine lineare Funktion der kartesischen, also eine **homogene** lineare Funktion der Dreieckskoordinaten (u_p, v_p, w_p) von p. Es besteht also für diesen Abstand eine Gleichung

$$(P, p) = A u_p + B v_p + C w_p.$$

Die noch unbekannten Konstanten A, B, C bestimmen sich leicht, wenn man den willkürlich angenommenen Punkt p successive mit den Ecken 1, 2, 3 des Fundamentaldreiecks zusammenfallen läßt. Berücksichtigt man nämlich wieder die Gleichungen (5) auf S. 185, so ergibt sich

$$A = (P, 1), \quad B = (P, 2), \quad C = (P, 3),$$

oder wenn man die homogenen Koordinaten (1) der Linie P einführt,

$$A = h_1 U_P, \quad B = h_2 V_P, \quad C = h_3 W_P,$$

wo die Dreieckshöhen (I, 1), (II, 2), (III, 3) zur Abkürzung mit h_1, h_2, h_3 bezeichnet sind.

Hieraus ergibt sich die wichtige Fundamentalformel

$$h_1 u_p U_P + h_2 v_p V_P + h_3 w_p W_P = (P, p), \tag{2}$$

durch welche der senkrechte Abstand eines beliebigen Punktes p von einer beliebigen Geraden P durch ihre homogenen Koordinaten ausgedrückt wird.

Haben der Punkt p und die Gerade P vereinigte Lage, d. h. liegt der Punkt p in der Geraden P, so wird in dieser Gleichung die rechte Seite zu Null, und dieselbe stellt dann ebensowohl die Gleichung der geraden Linie P in Punktkoordinaten, als die Gleichung des Punktes p in Linienkoordinaten dar, während die Koeffizienten, die im ersten Falle $(h_1 U_P, h_2 V_P, h_3 W_P)$, im zweiten $(h_1 u_p, h_2 v_p, h_3 w_p)$ sind, ihre unmittelbare geometrische Bedeutung haben. Speziell stellen

$$u_p = 0, \quad v_p = 0, \quad w_p = 0, \tag{3}$$

beziehlich die Gleichung der ersten, zweiten oder dritten Fundamentallinie in Punktkoordinaten, und

$$U_P = 0, \quad V_P = 0, \quad W_P = 0 \tag{3a}$$

die Gleichungen der drei Fundamentalpunkte in Linienkoordinaten dar.

Um nun die gesuchte Fundamentalrelation für die drei homogenen Koordinaten (U_P, V_P, W_P) der Linie P zu erhalten, schreiben wir die Gleichung (2) in der Form

$$(P, p) = U_P(\mathrm{I}, p) + V_P(\mathrm{II}, p) + W_P(\mathrm{III}, p)$$

und lassen hierin p mit zwei beliebig angenommenen Punkten 4 und 5 zusammenfallen. Subtrahiert man dann die beiden so entstehenden Gleichungen voneinander, so erhält man

$$\begin{aligned}\big((P, 4) - (P, 5)\big) = U_P\big((\mathrm{I}, 4) - (\mathrm{I}, 5)\big) + V_P\big((\mathrm{II}, 4) - (\mathrm{II}, 5)\big)\\ + W_P\big((\mathrm{III}, 4) - (\mathrm{III}, 5)\big).\end{aligned} \tag{4}$$

Bezeichnet man aber mit V eine zu der beliebig gewählten Linie $\overline{4, 5}$ senkrechte Gerade, so besteht für jede Lage der Geraden P die Gleichung

$$(P, 4) - (P, 5) = (4, 5) \cos (P, \mathrm{V}),$$

und zwar kann man die Seiten von V von vornherein so bestimmen, dafs in dieser Gleichung (4, 5) den absoluten Wert der Entfernung der

beiden eingeklammerten Punkte bedeutet, während unter (P, V) ein für allemal derjenige Winkel zu verstehen ist, welcher durch die positive Seite der einen und die negative Seite der anderen Geraden gebildet wird. Beachtet man also diese Gleichungen, sowie die drei entsprechenden für die auf der rechten Seite von (4) auftretenden Differenzen für $\big((\mathrm{I}, 4) - (\mathrm{I}, 5)\big), \ldots$, so ergibt sich die Relation

$$(5)\quad \cos(P, V) = U_P \cos(\mathrm{I}, V) + V_P \cos(\mathrm{II}, V) + W_P \cos(\mathrm{III}, V),$$

und in ihr kann offenbar wieder die positive Richtung der willkürlich angenommenen Geraden V ebenfalls ganz beliebig gewählt werden. Diese wichtige Gleichung bestimmt also den Winkel (P, V) der gewählten Geraden P mit einer ganz beliebigen Geraden V aus den Koordinaten von P und den Winkeln (I, V), (II, V) und (III, V), welche jene Gerade V mit den drei Fundamentallinien bildet.

Läßt man nun zunächst die Gerade V mit P zusammenfallen, so ergibt sich

$$(6)\qquad 1 = U_P \cos(\mathrm{I}, P) + V_P \cos(\mathrm{II}, P) + W_P \cos(\mathrm{III}, P),$$

und wenn man ferner in (5) die Gerade V mit jeder der drei Achsen I, II, III zur Deckung bringt, so erhält man für die drei in (6) auftretenden Kosinus die Gleichungen

$$(7)\quad \begin{aligned} \cos(\mathrm{I}, P) &= U_P + V_P \cos(\mathrm{I}, \mathrm{II}) + W_P \cos(\mathrm{I}, \mathrm{III}) \\ \cos(\mathrm{II}, P) &= U_P \cos(\mathrm{II}, \mathrm{I}) + V_P + W_P \cos(\mathrm{II}, \mathrm{III}) \\ \cos(\mathrm{III}, P) &= U_P \cos(\mathrm{III}, \mathrm{I}) + V_P \cos(\mathrm{III}, \mathrm{II}) + W_P. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (6) ein, so erhält man die gesuchte Relation zwischen den homogenen Koordinaten einer jeden geraden Linie

$$1 = U_P^2 + V_P^2 + W_P^2 + 2\,U_P V_P \cos(\mathrm{I}, \mathrm{II}) + 2\,V_P W_P \cos(\mathrm{II}, \mathrm{III}) + 2\,W_P U_P \cos(\mathrm{III}, \mathrm{I}),$$

oder wenn wir den Index P fortlassen und die Dreieckswinkel (I, II), (II, III) und (III, I) durch (3), (1), (2) bezeichnen,

$$(8)\quad 1 = U^2 + V^2 + W^2 + 2\,UV\cos(3) + 2\,VW\cos(1) + 2\,WU\cos(2).$$

Diese für die Linienkoordinaten (U, V, W) bestehende Gleichung läßt sich noch auf eine andere Form bringen. Es sei P' die durch 1 zu P gezogene Parallele und U', V' und W' ihre Koordinaten. Da U' offenbar gleich Null ist, so geht für sie die obige Relation über in

$$(8\mathrm{a})\qquad 1 = V'^2 + W'^2 + 2\,V'W'\cos(1).$$

Nun kann man aber leicht V' und W' durch die Koordinaten von P ausdrücken. In der Tat folgt aus den für die parallelen Geraden P und P' bestehenden Gleichungen

$$(P', 1) - (P, 1) = (P', 2) - (P, 2) = (P', 3) - (P, 3)$$

und aus dem Umstande, daſs $(P', 1)$ gleich Null ist,

$$(P', 2) = (P, 2) - (P, 1), \quad (P', 3) = (P, 3) - (P, 1),$$

und hieraus ergibt sich

$$V' = \frac{(P', 2)}{(\mathrm{II}, 2)} = V - \frac{(P, 1)}{(\mathrm{I}, 1)} \cdot \frac{(\mathrm{I}, 1)}{(\mathrm{II}, 2)} = V - U \frac{(\mathrm{I}, 1)}{(\mathrm{II}, 2)} = V - U \frac{\overline{31}}{\overline{23}},$$

da die Höhen $(\mathrm{I}, 1)$ und $(\mathrm{II}, 2)$ des Achsendreiecks den entsprechenden Dreiecksseiten $\overline{23}$ und $\overline{31}$ umgekehrt proportional sind. Genau ebenso erhält man

$$W' = W - U \frac{(\mathrm{I}, 1)}{(\mathrm{III}, 3)} = W - U \frac{\overline{12}}{\overline{23}}.$$

Setzt man diese Werte von V' und W' in (8a) ein, so ergibt sich für die ursprüngliche Relation nunmehr der folgende einfachere aber nicht symmetrische Ausdruck

$$\left(V - U \frac{\overline{31}}{\overline{23}}\right)^2 + \left(W - U \frac{\overline{12}}{\overline{23}}\right)^2 + 2\left(V - U \frac{\overline{31}}{\overline{23}}\right)\left(W - U \frac{\overline{12}}{\overline{23}}\right) \cos(1) = 1.$$

Mit Benutzung dieser identischen Relation zwischen den Koordinaten einer beliebigen Geraden kann nun ähnlich wie bei den Punktkoordinaten jede Gleichung zwischen (U, V, W) homogen gemacht werden.

Als Beispiel für diese Anwendung der homogenen Linienkoordinaten betrachten wir die Gleichung eines Kreises vom Radius R, dessen Mittelpunkt p die homogenen Koordinaten (u, v, w) hat, d. h. wir suchen die Bedingung für die Koordinaten (U, V, W) einer geraden Linie l, damit diese von $p = (u, v, w)$ den senkrechten Abstand R habe. Nach (2) lautet diese aber

$$h_1 u U + h_2 v V + h_3 w W = R, \tag{9}$$

wo h_1, h_2, h_3 wieder die Höhen des Achsendreiecks sind; und dies ist daher die gesuchte Gleichung des Kreises, jedoch noch nicht in homogener Form. Um dieselbe homogen zu machen, erheben wir beide Seiten ins Quadrat und formen ihre rechte Seite mit Hilfe der identischen Relation (8) um. Dann geht die Gleichung in die folgende über, welche homogene Form hat

$$\begin{aligned}(h_1 u U + h_2 v V + h_3 w W)^2 = R^2\big(&U^2 + V^2 + W^2 + 2 U V \cos(3) \\ &+ 2 V W \cos(1) + 2 W U \cos(2)\big).\end{aligned} \tag{9a}$$

Betrachtet man speziell den dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreis, so mufs die Gleichung (9) befriedigt sein, wenn man die Linie l mit einer der drei Achsen I, II, III zusammenfallen läſst, d. h. wenn man je eine der Koordinaten U, V, W gleich Eins, die beiden anderen gleich Null setzt. Aus den drei so sich ergebenden Gleichungen

$$h_1 u = h_2 v = h_3 w = R, \tag{10}$$

welche aussagen, daſs der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises von den drei Achsen eine und dieselbe Entfernung hat, ergibt sich nun die gesuchte Gleichung in der nicht homogenen Form

$$U + V + W = 1. \tag{11}$$

Setzt man die in (10) gefundenen Werte von u, v, w in die Gleichung (9a) ein, so geht diese nach leichten Umformungen über in

$$U V \sin^2 \frac{(3)}{2} + V W \sin^2 \frac{(1)}{2} + W U \sin^2 \frac{(2)}{2} = 0; \tag{11a}$$

dies ist also die Gleichung des dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreises in ihrer homogenen Form.

Zwölfte Vorlesung.

Die Determinanten vierter und fünfter Ordnung. — Ihre Haupteigenschaften. — Anwendungen der Determinanten vierter Ordnung in der Geometrie der Ebene. — Das Produkt zweier Dreiecksinhalte. — Beide Dreiecke sind demselben Kreise einbeschrieben. — Kongruente Abbildung zweier Körper aufeinander. — Die kongruenten Abbildungen erster und zweiter Art. — Orthogonale Systeme. — Ihre Haupteigenschaften. — Dekomposition der orthogonalen Systeme.

§ 1.

Wir wollen nun eine Auflösungsmethode von drei homogenen Gleichungen mit vier Unbekannten geben, welche der im § 1 der elften Vorlesung für zwei Gleichungen mit drei Unbekannten gegebenen vollständig analog ist; durch diese Auflösung werden wir von selbst auf die Determinanten vierter Ordnung geführt, deren charakteristische Eigenschaften hier nur deshalb noch hervorgehoben werden sollen, weil sie in der analytischen Geometrie des Raumes genau dieselbe wichtige Rolle spielen, wie die Determinanten dritter Ordnung in der Geometrie der Ebene.

Durch die homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u = 0 \\ f_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u = 0 \\ f_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

deren Koeffizientensystem vom Range drei sein möge, werden die vier Unbekannten bis auf eine multiplikative Konstante vollständig bestimmt. Es ist nämlich

$$\begin{gathered} x = \lambda\,|b_1, c_1, d_1|, \quad y = -\lambda\,|a_1, c_1, d_1|, \quad z = +\lambda\,|a_1, b_1, d_1|, \\ u = -\lambda\,|a_1, b_1, c_1|, \end{gathered} \tag{2}$$

wo λ eine willkürliche Konstante bedeutet.

Infolgedessen ist auch der Wert einer jeden linearen Funktion

$$f = ax + by + cz + du \tag{3}$$

mit beliebigen Koeffizienten (a, b, c, d) bis auf eine multiplikative Konstante völlig bestimmt, wenn die vier Variablen den Gleichungen (1) Geometrie bei der eindeutigen Abbildung dreifacher Mannigfaltigkeiten aufeinander.

genügen sollen. Setzt man nämlich die vorher gefundenen Werte der Unbekannten in den Ausdruck von f ein, so geht derselbe über in

$$(4)\quad f = \lambda(a\,|\,b_1, c_1, d_1\,| - b\,|\,a_1, c_1, d_1\,| + c\,|\,a_1, b_1, d_1\,| - d\,|\,a_1, b_1, c_1\,|).$$

Es ist also f bis auf den willkürlich anzunehmenden Faktor λ gleich einem ganz bestimmten aus den 16 Koeffizienten von f, f_1, f_2, f_3 gebildeten Ausdruck, welcher ausgeschrieben folgendermafsen lautet

$$(5)\qquad a\begin{vmatrix} b_1, & c_1, & d_1 \\ b_2, & c_2, & d_2 \\ b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & d_3 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Wir wollen ihn die Determinante des Koeffizientensystemes

$$\begin{Bmatrix} a, & b, & c, & d \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{Bmatrix}$$

nennen und ihn durch

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix},$$

oder, wo kein Mifsverständnis zu befürchten ist, kürzer durch

$$|\,a, b, c, d\,|$$

bezeichnen. Diese Determinante besitzt vier Zeilen und vier Kolonnen und soll deshalb eine Determinante vierter Ordnung genannt werden.

Aus dem Ausdrucke (5) der Determinante vierter Ordnung kann nun mit Leichtigkeit gefolgert werden, dafs sie genau dieselben charakteristischen Eigenschaften besitzt wie die Determinanten zweiter und dritter Ordnung.

Zunächst ist sie eine homogene lineare Funktion der Elemente einer beliebigen Horizontalreihe; denn dieses lehrt der Augenschein für die erste Zeile, während dasselbe für die übrigen Zeilen aus der analogen Eigenschaft der Determinanten dritter Ordnung folgt. Ferner verschwindet $|\,a, b, c, d\,|$, wenn die Elemente zweier Zeilen beziehlich gleich sind. Sind nämlich von den drei letzten Zeilen zwei einander gleich, so verschwinden die vier Determinanten dritter Ordnung, welche in (5) die Koeffizienten von a, b, c und d sind, und somit auch $|\,a, b, c, d\,|$ selbst. Ist aber die erste Zeile etwa der zweiten gleich, so geht der Ausdruck (5) über in

$$a_1\,|\,b_1,\,c_1,\,d_1\,| - b_1\,|\,a_1,\,c_1,\,d_1\,| + c_1\,|\,a_1,\,b_1,\,d_1\,| - d_1\,|\,a_1,\,b_1,\,c_1\,|,$$

und dieses ist identisch Null, wie in (5) auf S. 113 bewiesen wurde.

Hieraus folgt aber genau wie auf S. 126, daſs die Determinante bei Vertauschung zweier Zeilen nur ihr Vorzeichen ändert, und daſs sie ungeändert bleibt, wenn man zu den Elementen einer Zeile ein beliebiges Vielfaches der entsprechenden Elemente einer anderen addiert.

Ganz dieselben Sätze gelten aber auch für die Vertikalreihen oder Kolonnen der Determinante vierter Ordnung. Aus ihrer Darstellung in (5) geht nämlich unmittelbar hervor, daſs sie in den Elementen einer jeden Kolonne linear und homogen ist, und fast ebenso einfach folgt, daſs sie verschwindet, sobald die Elemente zweier Kolonnen einander beziehlich gleich sind. Sind nämlich z. B. die Elemente b gleich den entsprechenden a, so verschwinden in (5) die beiden letzten Summanden identisch, während die beiden ersten einander aufheben. Aus diesem Satze flieſsen dann sofort alle oben für die Verbindung zweier Zeilen gezogenen Folgerungen auch für die Kolonnen.

Auch hier kann man nun genau so wie dies in der neunten Vorlesung für Systeme von 9 Elementen geschah, beweisen, daſs eine Funktion der 16 Elemente des Systemes $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{pmatrix}$, welche linear und homogen ist in Bezug auf die Elemente jeder Zeile desselben, und welche verschwindet, sobald zwei Zeilen einander gleich sind, sich von der Determinante $|\,a, b, c, d\,|$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden kann; und genau dasselbe gilt auch für die Vertikalreihen. Nimmt man also zu diesen Eigenschaften noch die aus (5) unmittelbar folgende Tatsache hinzu, daſs die Determinante gleich Eins wird, sobald man das System $(a,\ b,\ c,\ d)$ durch das Einheitssystem vierter Ordnung ersetzt, so ist durch sie die Determinante eindeutig bestimmt. Hieraus folgen nun alle weiteren Eigenschaften dieser Determinanten. Wir wollen nur zwei von ihnen erwähnen, welche im folgenden benützt werden sollen. Da die Determinante in Bezug auf ihre Vertikalreihen genau dieselben charakteristischen Eigenschaften besitzt wie für die Horizontalreihen, so bleibt sie ungeändert, wenn man ihre Zeilen und Kolonnen vertauscht, d. h. es ist

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & a_1, & a_2, & a_3 \\ b, & b_1, & b_2, & b_3 \\ c, & c_1, & c_2, & c_3 \\ d, & d_1, & d_2, & d_3 \end{vmatrix}.$$

Komponiert man ferner zwei beliebige Systeme vierter Ordnung

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \alpha''' \\ \beta, & \beta', & \beta'', & \beta''' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'', & \gamma''' \\ \delta, & \delta', & \delta'', & \delta''' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{pmatrix}$$

genau in derselben Weise miteinander, wie dies früher für Systeme zweiter und dritter Ordnung angegeben wurde, so erhält man ein neues „komponiertes System“

$$(\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')(a, b, c, d) = (\Sigma\alpha a, \Sigma\alpha b, \Sigma\alpha c, \Sigma\alpha d),$$

wo sich die Summation immer auf alle oberen Indizes beziehen soll. Die Determinante dieses neuen Systemes ist nun offenbar eine lineare homogene Funktion der Elemente jeder Kolonne der ersten Komponente und verschwindet identisch, sobald zwei Kolonnen des ersten Systemes übereinstimmen. Dieselbe unterscheidet sich daher von der Determinante $|\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''|$ nur durch eine von den $(\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')$ unabhängige Gröfse, d. h. es ist

$$|(\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')(a, b, c, d)| = |\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''|\, \Phi(a, b, c, d).$$

Ersetzt man aber, um den Faktor Φ zu bestimmen, das erste System durch das Einheitssystem, so geht die linke Seite über in $|a, b, c, d|$, während die rechte gleich $\Phi(a, b, c, d)$ selbst wird. Es besteht somit auch für Determinanten vierter Ordnung der Multiplikationssatz

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \Sigma\alpha a, & \Sigma\alpha b, & \Sigma\alpha c, & \Sigma\alpha d \\ \Sigma\beta a, & \Sigma\beta b, & \Sigma\beta c, & \Sigma\beta d \\ \Sigma\gamma a, & \Sigma\gamma b, & \Sigma\gamma c, & \Sigma\gamma d \\ \Sigma\delta a, & \Sigma\delta b, & \Sigma\delta c, & \Sigma\delta d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \alpha''' \\ \beta, & \beta', & \beta'', & \beta''' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'', & \gamma''' \\ \delta, & \delta', & \delta'', & \delta''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3 \end{vmatrix}.$$

Endlich will ich noch kurz auf die entsprechenden Sätze für die Determinanten fünfter Ordnung hinweisen, weil wir auch diesen mitunter bei unseren geometrischen Anwendungen begegnen werden; jedoch wollen wir auf sie nicht ausführlich eingehen, da die bezüglichen Resultate ebenso einfach aus der allgemeinen Theorie folgen werden.

Betrachtet man vier homogene lineare Gleichungen mit fünf Unbekannten und unbestimmten Koeffizienten

$$(8)\quad \begin{aligned} f_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1u + e_1v = 0 \\ f_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2u + e_2v = 0 \\ f_3 &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3u + e_3v = 0 \\ f_4 &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4u + e_4v = 0, \end{aligned}$$

so kann man ihre Lösung mit Hilfe der Determinanten vierter Ordnung leicht angeben. Aus dem zugehörigen Koeffizientensysteme

$$(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4, & e_4 \end{pmatrix}$$

kann man nämlich fünf verschiedene Determinanten vierter Ordnung dadurch bilden, daſs man je eine Kolonne fortläſst und dann die übrigen zu einer Determinante vierter Ordnung vereinigt. Bezeichnen wir diese Determinanten wieder nach ihrer ersten Zeile durch

$$|b_1, c_1, d_1, e_1|, \; |a_1, c_1, d_1, e_1|, \; |a_1, b_1, d_1, e_1|, \; |a_1, b_1, c_1, e_1|, \; |a_1, b_1, c_1, d_1|,$$

so zeigt man wieder leicht, daſs die fünf Unbekannten in (8) bis auf eine multiplikative Konstante λ vollständig durch die Gleichungen

$$(9)\begin{cases} x = \lambda|b_1, c_1, d_1, e_1|, \quad y = -\lambda|a_1, c_1, d_1, e_1|, \quad z = +\lambda|a_1, b_1, d_1, e_1| \\ \qquad u = -\lambda|a_1, b_1, c_1, e_1|, \quad v = +\lambda|a_1, b_1, c_1, d_1| \end{cases}$$

bestimmt sind. Denn eine einfache Ausrechnung zeigt, ebenso wie früher auf S. 196, daſs jene Determinanten unsere Gleichungen befriedigen, da die vier Identitäten

$$(10)\quad \begin{aligned} a_i|b_1, c_1, d_1, e_1| - b_i|a_1, c_1, d_1, e_1| + c_i|a_1, b_1, d_1, e_1| - d_i|a_1, b_1, c_1, e_1| \\ + e_i|a_1, b_1, c_1, d_1| = 0 \end{aligned}$$

für $i = 1, 2, 3, 4$ erfüllt sind; und zweitens beweist man genau wie auf S. 116, daſs jene Gleichungen sicher nicht mehr als eine Lösung haben können, sobald die Koeffizienten als Unbestimmte angenommen werden.

Infolgedessen ist der Wert einer linearen homogenen Funktion

$$(11)\qquad f = ax + by + cz + du + ev$$

jener fünf Gröſsen mit beliebigen Koeffizienten bis auf eine multiplikative Konstante λ eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, daſs x, y, z, u, v jene vier Gleichungen (8) befriedigen sollen. In der Tat ergibt sich ja durch Substitution jener fünf Werte in (11) für f der Ausdruck

$$\begin{aligned} f = \lambda(a|b_1, c_1, d_1, e_1| - b|a_1, c_1, d_1, e_1| + c|a_1, b_1, d_1, e_1| - d|a_1, b_1, c_1, e_1| \\ + e|a_1, b_1, c_1, d_1|). \end{aligned}$$

Wir nennen den Koeffizienten von λ wieder die aus dem Koeffizientensysteme

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3, & e_3 \\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4, & e_4 \end{pmatrix}$$

gebildete Determinante fünfter Ordnung und bezeichnen sie so, dafs wir jenes Koeffizientensystem zwischen Determinantenstriche einschliefsen, oder kürzer nur durch die erste Horizontalreihe

$$|a, b, c, d, e|.$$

Wörtlich ebenso wie vorher auf S. 197 flgd. beweisen wir jetzt mit Hilfe der Eigenschaften der Determinanten vierter Ordnung, dafs für den Ausdruck

$$|a, b, c, d, e| = a\,|b_1, c_1, d_1, e_1| - b\,|a_1, c_1, d_1, e_1| + \cdots$$

die folgenden Fundamentalsätze bestehen:

Die Determinante ist eine homogene lineare Funktion der Elemente einer beliebigen Reihe (Zeile oder Kolonne); sie verschwindet, wenn die Elemente zweier Parallelreihen einander beziehlich gleich sind, und sie ändert nur ihr Zeichen, wenn zwei Parallelreihen vertauscht werden. Sie bleibt ungeändert, wenn man zu einer Reihe ein Vielfaches einer Parallelreihe addiert.

Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht, d. h. wenn man das System (a, b, c, d, e) durch das konjugierte (a, a_1, a_2, a_3, a_4) ersetzt.

Definiert man endlich die Komposition zweier Systeme fünfter Ordnung genau ebenso, wie dies vorher für Systeme niedrigerer Ordnung geschah, so ist wieder die Determinante eines komponierten Systemes gleich dem Produkte der Determinanten seiner Komponenten.

§ 2.

Wir wollen die entwickelte Theorie der Determinanten vierter Ordnung zuerst benützen, um einen eleganten Ausdruck für das Produkt der Flächeninhalte von zwei Dreiecken 1, 2, 3 und 4, 5, 6 herzuleiten, deren Eckpunktkoordinaten

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3) \quad \text{und} \quad (x_4, y_4),\ (x_5, y_5),\ (x_6, y_6)$$

beliebig gegeben sind. Bezeichnet man wieder mit (1, 2, 3) und (4, 5, 6) die doppelten Inhaltszahlen jener beiden Dreiecke, so

folgt aus den soeben bewiesenen Sätzen für die Determinanten vierter Ordnung für das gesuchte Produkt die Gleichung

$$-(1, 2, 3)(4, 5, 6) = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & 0 \\ 1, & x_2, & y_2, & 0 \\ 1, & x_3, & y_3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ x_4, & x_5, & x_6, & 0 \\ y_4, & y_5, & y_6, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1x_4 + y_1y_4, & x_1x_5 + y_1y_5, & x_1x_6 + y_1y_6, & 1 \\ x_2x_4 + y_2y_4, & x_2x_5 + y_2y_5, & x_2x_6 + y_2y_6, & 1 \\ x_3x_4 + y_3y_4, & x_3x_5 + y_3y_5, & x_3x_6 + y_3y_6, & 1 \\ 1 \quad, & 1 \quad, & 1 \quad, & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man aber allgemein für $i = 1, 2, 3$ von der i^{ten} Zeile die mit $\frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2)$ multiplizierte letzte Zeile und dann von der ersten, zweiten und dritten Kolonne die mit

$$\frac{1}{2}(x_4^2 + y_4^2), \quad \frac{1}{2}(x_5^2 + y_5^2), \quad \frac{1}{2}(x_6^2 + y_6^2)$$

multiplizierte letzte Kolonne, so tritt an die Stelle jedes der neun inneren Elemente offenbar das folgende

$$x_i x_k + y_i y_k - \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2) - \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2) = -\frac{1}{2}[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2]$$
$$= -\frac{1}{2}(i, k)^2 \quad (i=1, 2, 3;\ k=4, 5, 6),$$

wenn durch (i, k) die Entfernung des Eckpunktes i des ersten Dreiecks von dem Eckpunkte k des zweiten bezeichnet wird; es ergibt sich also die Gleichung

$$(1, 2, 3)\cdot(4, 5, 6) = -\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(1, 4)^2, & -\frac{1}{2}(1, 5)^2, & -\frac{1}{2}(1, 6)^2, & 1 \\ -\frac{1}{2}(2, 4)^2, & -\frac{1}{2}(2, 5)^2, & -\frac{1}{2}(2, 6)^2, & 1 \\ -\frac{1}{2}(3, 4)^2, & -\frac{1}{2}(3, 5)^2, & -\frac{1}{2}(3, 6)^2, & 1 \\ 1 \quad, & 1 \quad, & 1 \quad, & 0 \end{vmatrix}.$$

Schafft man endlich noch die Koeffizienten $-\frac{1}{2}$ dadurch fort, daſs man die drei ersten Zeilen mit -2 multipliziert und dafür die letzte Kolonne durch -2 dividiert, wodurch die ganze Determinante mit $+4$ multipliziert wird, so ergibt sich die Formel

$$(1) \qquad 4\cdot(1, 2, 3)\cdot(4, 5, 6) = -\begin{vmatrix} (1, 4)^2, & (1, 5)^2, & (1, 6)^2, & 1 \\ (2, 4)^2, & (2, 5)^2, & (2, 6)^2, & 1 \\ (3, 4)^2, & (3, 5)^2, & (3, 6)^2, & 1 \\ 1 \quad, & 1 \quad, & 1 \quad, & 0 \end{vmatrix}.$$

Von dieser eleganten Determinantenformel für das Produkt zweier Dreiecksinhalte wollen wir noch zwei spezielle Fälle betrachten. Liegen die drei Punkte 1, 2, 3 nicht in einer Geraden, so verschwindet die obige Determinante dann und nur dann, wenn der Inhalt des Dreiecks (4, 5, 6) gleich Null ist. Das Verschwinden der obigen Determinante gibt uns somit die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs die drei Punkte 4, 5, 6 in einer geraden Linie liegen, oder also sie liefert uns die Beziehung, welche zwischen den neun Entfernungen dreier Punkte einer beliebigen Geraden von irgend drei Punkten der Ebene bestehen muſs.

Läſst man ferner die Punkte (4, 5, 6) beziehlich mit (1, 2, 3) zusammenfallen, so ergibt sich der folgende Ausdruck für das Quadrat des Dreiecksinhalts (1, 2, 3)

$$(1\text{a})\quad 4(1,2,3)^2 = -\begin{vmatrix} 0, & (1,2)^2, & (1,3)^2, & 1 \\ (1,2)^2, & 0, & (2,3)^2, & 1 \\ (1,3)^2, & (2,3)^2, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0, & c^2, & b^2, & 1 \\ c^2, & 0, & a^2, & 1 \\ b^2, & a^2, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix},$$

wenn die Längen der Seiten (2, 3), (3, 1), (1, 2) beziehlich durch a, b, c bezeichnet werden.

Das Verschwinden dieser Determinante gibt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs drei Punkte 1, 2, 3 auf einer Geraden liegen; je drei Punkte einer beliebigen Geraden und nur sie sind somit durch diese Relation miteinander verbunden.

Subtrahiert man in der Determinante (1a) die erste Kolonne von den beiden folgenden und verfährt dann ebenso mit den Zeilen der so umgewandelten Determinante, so geht sie über in

$$4(1,2,3)^2 = +\begin{vmatrix} c^2, & b^2, & 1 \\ -c^2, & a^2-c^2, & 1 \\ a^2-b^2, & -b^2, & 1 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} -2c^2, & a^2-b^2-c^2 \\ a^2-b^2-c^2, & -2b^2 \end{vmatrix}.$$

$$= 4b^2c^2 - (a^2-b^2-c^2)^2 = [-a^2+(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]$$

$$= 16s(s-a)(s-b)(s-c) \qquad s = \tfrac{1}{2}(a+b+c);$$

wir sind somit hier zu der bekannten Formel der Trigonometrie für den Dreiecksinhalt, ausgedrückt durch die drei Seiten, gelangt.

Wir wollen nun noch den speziellen Fall betrachten, daſs beide Dreiecke (1, 2, 3) und (4, 5, 6) einem und demselben Kreise mit dem Radius r einbeschrieben sind. Es sei der Mittelpunkt jenes Kreises der Koordinatenanfangspunkt; sind dann J und J_1 die Dreiecksinhalte, so ist identisch

$$4JJ_1 = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ x_4, & x_5, & x_6 \\ y_4, & y_5, & y_6 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} r, & -x_1, & -y_1 \\ r, & -x_2, & -y_2 \\ r, & -x_3, & -y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r, & r, & r \\ +x_4, & +x_5, & +x_6 \\ +y_4, & +y_5, & +y_6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} r^2 - x_1x_4 - y_1y_4, & r^2 - x_1x_5 - y_1y_5, & r^2 - x_1x_6 - y_1y_6 \\ r^2 - x_2x_4 - y_2y_4, & r^2 - x_2x_5 - y_2y_5, & r^2 - x_2x_6 - y_2y_6 \\ r^2 - x_3x_4 - y_3y_4, & r^2 - x_3x_5 - y_3y_5, & r^2 - x_3x_6 - y_3y_6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left| r^2 - x_ix_k - y_iy_k \right| \qquad \binom{i=1,2,3}{k=4,5,6},$$

oder da

$$(i,k)^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = (x_i^2 + y_i^2) + (x_k^2 + y_k^2) - 2(x_ix_k + y_iy_k)$$
$$= 2(r^2 - x_ix_k - y_iy_k)$$

ist, so ergibt sich, wenn man auf beiden Seiten mit 8 multipliziert und rechts die Entfernungen $(i, k)^2$ einführt

$$(2) \qquad 32\,JJ_1 = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} (1,4)^2, & (1,5)^2, & (1,6)^2 \\ (2,4)^2, & (2,5)^2, & (2,6)^2 \\ (3,4)^2, & (3,5)^2, & (3,6)^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante unterscheidet sich von der oben gefundenen (1) nur durch das Fehlen des Randes.

Fallen die beiden Dreiecke (1, 2, 3) und (4, 5, 6) zusammen, so geht unsere Gleichung (2) über in

$$4J^2 = \frac{1}{8r^2} \begin{vmatrix} 0, & c^2, & b^2 \\ c^2, & 0, & a^2 \\ b^2, & a^2, & 0 \end{vmatrix},$$

oder wenn man in dieser Gleichung die Kolonnen beziehlich mit a^2, b^2, c^2 multipliziert und dafür die Determinante durch $a^2b^2c^2$ dividiert

$$4J^2 = \frac{1}{8r^2} \cdot \frac{1}{a^2b^2c^2} \cdot \begin{vmatrix} 0, & b^2c^2, & c^2b^2 \\ a^2c^2, & 0, & c^2a^2 \\ a^2b^2, & b^2a^2, & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8r^2} \cdot a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \end{vmatrix},$$

und da jene letzte Determinante offenbar gleich 2 ist, so folgt die Gleichung

$$a \cdot b \cdot c = 4r \cdot J.$$

In jedem Dreiecke ist also das Produkt aus den drei Seiten gleich dem vierfachen Produkte aus seinem Inhalte und dem Radius des umschriebenen Kreises.

§ 3.

Eine besonders wichtige Anwendung und Veranschaulichung erfahren die Sätze über die Komposition der Systeme in der analytischen

Wir betrachten irgend zwei beliebig im Raume liegende Körper K und K', nehmen in jedem von ihnen ein fest mit ihm verbundenes rechtwinkliges Koordinatensystem an, deren Anfangspunkte beziehlich O und O' sein mögen. Dann wollen wir einem beliebigen Punkte P von K den Punkt P' von K' zuordnen, wenn zwischen ihren Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') die Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned} x' &= \lambda\, x + \mu\, y + \nu\, z \\ y' &= \lambda' x + \mu' y + \nu' z \\ z' &= \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z. \end{aligned} \tag{1}$$

Jedem Punkte P des Körpers K entspricht dann ein und nur ein Punkt P' von K', jedoch braucht das Umgekehrte nicht notwendig stattzufinden. Ist nämlich die Determinante des Systemes $\begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}$ gleich Null, dann kann man drei nicht sämtlich verschwindende Zahlen p, q, r so bestimmen, daſs in der Gleichung

$$px' + qy' + rz' = (p\lambda + q\lambda' + r\lambda'')x + (p\mu + q\mu' + r\mu'')y + (p\nu + q\nu' + r\nu'')z$$

die Koeffizienten von x, y, z auf der rechten Seite identisch verschwinden, d. h. daſs die Gleichung

$$px' + qy' + rz' = 0 \tag{2}$$

für jedes Wertsystem (x, y, z) identisch erfüllt ist. Daraus folgt, daſs allen Punkten P des Körpers K nur solche Punkte P' von K' entsprechen können, welche in der durch (2) bestimmten Ebene E' liegen. In diesem Falle ist demnach das Entsprechen kein eindeutiges.

Dagegen erkennt man leicht, daſs falls die Determinante des Substitutionssystemes von Null verschieden ist, jedem Punkte von K ein Punkt von K' entspricht und umgekehrt. Ist nämlich die Determinante $|\lambda, \mu, \nu| \gtrless 0$, und ist

$$\begin{pmatrix} l, & l', & l'' \\ m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix}$$

das zu (λ, μ, ν) reziproke System, so daſs also

$$\begin{pmatrix} l, & l', & l'' \\ m, & m', & m'' \\ n, & n', & n'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

ist, so erhält man, wenn man die Gleichungen (1) beziehlich mit l, l', l'' multipliziert, die Produkte addiert, und dann entsprechend mit m, m', m''

und n, n', n'' verfährt, die folgenden Ausdrücke von x, y, z durch x', y', z'

$$
\begin{aligned}
x &= l x' + l' y' + l'' z' \\
y &= m x' + m' y' + m'' z' \\
z &= n x' + n' y' + n'' z'.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Die Punkte von K und K' werden einander also dann und nur dann durch die Gleichung (1) eindeutig zugeordnet, wenn die Substitutionsdeterminante von Null verschieden ist.

Von besonderer Wichtigkeit für die analytische Geometrie sind nun diejenigen Abbildungen, bei welchen je zwei entsprechende Punkte gleiche Entfernung haben. Eine solche eindeutige Zuordnung heifst eine kongruente Abbildung, die zugehörige Transformation (λ, μ, ν) wird eine orthogonale genannt. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Substitution (1) so zu bestimmen, dafs dieser speziellen Bedingung genügt werde.

Nun kann man sich zunächst ohne jede Rechnung überzeugen, dafs jene Abbildungen in zwei voneinander völlig verschiedene Klassen zerfallen müssen. Zu diesem Zwecke betrachten wir drei Punkte 1, 2, 3 von K, welche nicht in einer Geraden liegen, und suchen die ihnen entsprechenden Punkte $1', 2', 3'$ von K'. Dann sind die beiden durch sie gebildeten Dreiecke (1, 2, 3) und $(1', 2', 3')$ einander kongruent, weil ihre Seiten nach der über die Substitution gemachten Voraussetzung einander gleich sind. Wählt man ferner einen beliebigen Punkt 4 in der durch (1, 2, 3) bestimmten Ebene E, so liegt der entsprechende Punkt $4'$ in der das Dreieck $1', 2', 3'$ enthaltenden Ebene E', weil seine Entfernungen von den Punkten $1', 2', 3'$ mit denen des Punktes 4 von 1, 2, 3 übereinstimmen. Legt man also, was stets möglich ist, die Ebene E' so auf E, dafs die Punkte $1', 2', 3'$ auf die ihnen entsprechenden 1, 2, 3 fallen, so fällt von selbst jeder Punkt $4'$ von E' auf den ihm entsprechenden 4 von E; die einander zugeordneten Punkte in den beiden entsprechenden Ebenen können also stets durch Aufeinanderlegen der Ebenen zur Deckung gebracht werden.

Wir denken uns nun K' so bewegt, dafs E' auf E fällt, und betrachten nunmehr zwei einander entsprechende Punkte 5 und $5'$, welche nicht in E bezw. E' liegen. Dann erkennt man sofort, dafs $5'$ entweder mit 5 zusammenfallen, oder aber zu 5 in Bezug auf die Ebene E' symmetrisch liegen mufs; denn nach der in Bezug auf die Abbildung gemachten Voraussetzung besitzen ja 5 und $5'$ dieselbe Entfernung von jedem der zusammenfallenden Punkte 4 bezw. $4'$ in der Ebene E.

Es sei nun zunächst die Abbildung eine solche, daſs zwei bestimmte einander entsprechende Punkte 5 und 5′ zusammenfallen; dann erkennt man leicht, daſs dann auch alle entsprechenden Punkte zusammenfallen müssen, daſs also in diesem Falle der Körper K' in eine solche Lage gebracht werden kann, daſs alle entsprechenden Punkte sich decken. Betrachtet man nämlich zwei beliebige entsprechende Punkte 6 und 6′, so besitzen beide von den vier Ecken der beiden zusammenfallenden Tetraeder (1, 2, 3, 5) und (1′, 2′, 3′, 5′) dieselbe Entfernung, und dies ist dann und nur dann möglich, wenn sie zusammenfallen.

Ist dagegen 5′ das Spiegelbild von 5 in Bezug auf E, so ist auch jeder andere Punkt 6′ das Spiegelbild seines entsprechenden Punktes 6; denn fiele er mit diesem zusammen, so müſsten ja nach dem soeben geführten Beweise alle anderen, also auch 5 und 5′ zusammenfallen, was nicht der Fall ist.

Hiernach zerfallen also die kongruenten Abbildungen eines Körpers K auf einen anderen K' in solche, bei welchen alle entsprechenden Punkte derselben zur Deckung gebracht werden können, und in solche, bei welchen dies nicht möglich ist. Bei letzterer Abbildung können zwar zwei beliebige entsprechende Ebenen Punkt für Punkt zur Deckung gebracht werden; dann müssen aber je zwei nicht in ihnen liegende entsprechende Punkte in Bezug auf jene Ebene symmetrisch liegen.

Die einfachsten Fälle dieser beiden Abbildungen sind die folgenden

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= x' \\ y &= \quad y' \\ z &= \qquad z' \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= x' \\ y &= \quad y' \\ z &= \qquad -z'. \end{aligned}$$

Bei der ersten entsprechen den Punkten der drei Achsen von K die entsprechenden Punkte der Achsen von K', bei der zweiten entsprechen sich die Punkte der xy-Ebene und $x'y'$-Ebene, welche gleiche Abscissen haben, während jedem Punkte der z-Achse mit positiver Abscisse derjenige Punkt der z'-Achse mit negativer Abscisse entspricht, welcher die gleiche Entfernung vom Anfangspunkte hat.

Es ist nun leicht, ähnlich wie im § 8 der vierten Vorlesung, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, daſs die durch die Gleichungen (1) vermittelte eindeutige Abbildung eine kongruente, d. h. daſs die zugehörige Transformation eine orthogonale ist, so daſs also je zwei entsprechende Punktepaare gleiche Entfernung haben. Sind nämlich P und P' zwei beliebige entsprechende Punkte, (x, y, z) und (x', y', z') ihre Koordinaten, so müssen, da die beiden Anfangspunkte O und O' sich gegenseitig entsprechen, die Entfernungen OP und $O'P'$

einander gleich sein, d. h. es müssen die Koeffizienten in (1) so gewählt werden, daſs

(5) $$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ist. Geometrisch heiſst das: Eine Abbildung von K auf K' kann nur dann kongruent sein, wenn diejenigen Punkte, welche auf zwei um die Anfangspunkte mit gleichem Radius beschriebenen Kugeln liegen, einander eindeutig entsprechen. Genügen aber anderseits die Koeffizienten dieser Forderung, so ist die Transformation eine orthogonale. In der Tat sind (P_1, P_2) und (P_1', P_2') zwei beliebige entsprechende Punktepaare und (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) bezw. (x_1', y_1', z_1'), (x_2', y_2', z_2') ihre Koordinaten, so hängen dieselben ebenfalls durch die Gleichungen (1) zusammen. Bezeichnet man also die Koordinatendifferenzen

$$(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) \quad \text{und} \quad (x_2' - x_1',\ y_2' - y_1',\ z_2' - z_1')$$

beziehlich durch

$$(X, Y, Z) \quad \text{und} \quad (X', Y', Z'),$$

so bestehen auch zwischen ihnen die Gleichungen

$$\begin{aligned} X' &= \lambda\ X + \mu\ Y + \nu\ Z \\ Y' &= \lambda' X + \mu' Y + \nu' Z \\ Z' &= \lambda'' X + \mu'' Y + \nu'' Z. \end{aligned}$$

Sind nun die Substitutionskoeffizienten so gewählt, daſs die Gleichung (5) erfüllt ist, so ist also auch

$$\overline{P_1 P_2}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = \overline{P_1' P_2'}^2,$$

die Abbildung ist also eine kongruente.

Um nun die Bedingungen zu erhalten, welchen die neun Koeffizienten der in (1) betrachteten Transformation

$$S = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}$$

genügen müssen, damit die Substitution eine orthogonale sei, ersetzen wir in (5) die Variablen x', y', z' durch ihre in (1) angegebenen Ausdrücke. Setzt man in der so sich ergebenden Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\lambda x + \mu y + \nu z)^2 + (\lambda' x + \mu' y + \nu' z)^2 + (\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)^2$$

die Koeffizienten der einzelnen Variablenprodukte auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man ein System von neun Gleichungen für die Substitutionskoeffizienten, welche man unter Benützung der für die Komposition zweier Systeme gegebenen Regeln folgendermaſsen schreiben kann

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} \lambda, & \lambda', & \lambda'' \\ \mu, & \mu', & \mu'' \\ \nu, & \nu', & \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

oder kürzer, wenn mit $\overline{S}$ wieder das zu S konjugierte System bezeichnet wird

$$(6\text{a})\qquad \overline{S}\cdot S = E.$$

Ein System S ist demnach dann und nur dann ein orthogonales, wenn es mit seinem konjugierten komponiert das Einheitssystem ergibt.

Da die Determinante von S von Null verschieden ist, so existiert ein und nur ein zu S reziprokes System S^{-1}, für welches

$$(7)\qquad S^{-1}\cdot S = S\cdot S^{-1} = E$$

ist; hieraus ergibt sich aber durch Vergleichung mit (6a)

$$(7\text{a})\qquad S^{-1} = \overline{S},$$

d. h. das System S ist dann und nur dann orthogonal, wenn das reziproke System dem zu S konjugierten gleich ist.

Ersetzt man in den beiden Gleichungen (7) das reziproke System durch das transponierte $\overline{S}$, so ergeben sich die beiden Gleichungssysteme $\overline{S}\cdot S = S\cdot\overline{S} = E$, oder

$$(8)\begin{pmatrix} \lambda, & \lambda', & \lambda'' \\ \mu, & \mu', & \mu'' \\ \nu, & \nu', & \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \lambda', & \lambda'' \\ \mu, & \mu', & \mu'' \\ \nu, & \nu', & \nu'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

welche ausgeschrieben folgendermaßen lauten

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = \mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = \nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2 = 1$$
$$\lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' = \mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'' = \nu\lambda + \nu'\lambda' + \nu''\lambda'' = 0$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 = 1$$
$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = \lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' = \lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu = 0,$$

von denen die sechs letzten eine Folge der sechs ersten sind, wie auch leicht direkt verifiziert werden kann.

Es gilt also zunächst der Satz:

Ist S ein orthogonales System, so ist auch das konjugierte $\overline{S}$ ebenfalls orthogonal.

Aus der Definitionsgleichung (6a) für die orthogonalen Systeme ergeben sich ferner die beiden wichtigen Folgerungen:

Sind S und T zwei orthogonale Systeme, so ist es auch ihr Produkt ST.

Ist nämlich $\bar{S}S = \bar{T}T = E$, so ist in der Tat

$$(\overline{ST})(ST) = \bar{T}\bar{S}ST = \bar{T}T = E.$$

Ist S ein orthogonales System, so ist auch das reziproke System orthogonal.

In der Tat folgt ja aus der Gleichung $\bar{S}S = E$ durch Übergang zu den reziproken Systemen

$$(\bar{S}S)^{-1} = (S^{-1})(\overline{S^{-1}}) = E.$$

Geht man endlich in den Gleichungen (8) von den Systemen zu den Determinanten über und berücksichtigt, daſs die beiden dort auftretenden konjugierten Systeme gleiche Determinanten haben, so ergibt sich

$$|S|^2 = 1$$

oder

$$|S| = \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Die orthogonalen Systeme zerfallen also in zwei wesentlich verschiedene Klassen, je nachdem ihre Determinante $+1$ oder -1 ist. Die einfachsten orthogonalen Systeme beider Klassen sind die folgenden

$$(9) \qquad E = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$$

Ihnen entsprechen die vorher betrachteten orthogonalen Substitutionen (4). Bei der ersten von ihnen bringt man die entsprechenden Punkte von K und K' zur Deckung, indem man die drei Achsen von K' mit den entsprechenden von K nach Lage und Richtung zur Deckung bringt; bei der zweiten muſs man noch die positive Richtung der z-Achse umkehren, damit alle entsprechenden Punkte sich decken; bei dem zweiten Systeme können also die beiden Körper K und K' nicht so aufeinander gelegt werden, daſs je zwei entsprechende Punkte sich decken.

§ 4.

Im folgenden soll nun die Zerlegung der orthogonalen Systeme in elementare dargestellt und im Anschlusse hieran ihr geometrischer Charakter geprüft werden.

Da das Produkt beliebig vieler orthogonaler Systeme wieder orthogonal ist, so liegt der Gedanke nahe, dieselben ebenfalls als Produkte von Elementarsystemen darzustellen. Wir wollen dies tun und zwar wollen wir unter Elementarsystemen die folgenden drei Systeme verstehen, welche eine sehr einfache geometrische Bedeutung haben,

$$(1)\quad E_{12}=\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & 0 \\ -\beta, & \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},\quad E_{13}=\begin{pmatrix} \alpha_1, & 0, & \beta_1 \\ 0, & 1, & 0 \\ -\beta_1, & 0, & \alpha_1 \end{pmatrix},\quad E_{23}=\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha_2, & \beta_2 \\ 0, & -\beta_2, & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

wo die Konstanten (α, β), (α_1, β_1), (α_2, β_2) nur den Bedingungen

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha_1^2+\beta_1^2=\alpha_2^2+\beta_2^2=1$$

genügen müssen. Diese Systeme E_{12}, E_{13}, E_{23} gehen aus dem orthogonalen Systeme zweiter Ordnung dadurch hervor, daſs eine dritte, zweite oder erste Zeile und Kolonne mit den entsprechenden Gliedern des Einheitssystemes hinzugefügt werden. Die Determinante aller dieser Systeme ist offenbar gleich $+1$. Aus der zum ersten Systeme gehörigen Transformation

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= -\beta x + \alpha y \\ z' &= z \end{aligned}$$

erkennt man mit Hilfe der auf S. 63 unten gemachten Bemerkungen, daſs hier die entsprechenden Punkte von K' und K dadurch zur Deckung gebracht werden können, daſs man die Achsen von K' auf die von K legt und hierauf K' um die z-Achse um denjenigen Winkel φ dreht, für welchen

$$\cos\varphi=\alpha, \qquad \sin\varphi=\beta$$

ist. Ebenso sieht man, daſs bei den beiden anderen elementaren orthogonalen Transformationen die Koinzidenz durch eine Drehung um die y-, bezw. um die z-Achse herbeigeführt werden kann.

Die Komposition mit einem Elementarsysteme entspricht also geometrisch einer Drehung des Koordinatensystemes um eine der drei Achsen um einen bestimmten Winkel φ. Offenbar ist auch das zu einem Elementarsysteme reziproke System ebenfalls elementar; es entspricht der Drehung um dieselbe Achse um den negativen Winkel $-\varphi$.

Nennen wir wieder zwei orthogonale Systeme S und T äquivalent, wenn sie sich nur um Elementarsysteme von der Form (1) unterscheiden, so besteht der Satz:

Jedes orthogonale System ist einem der beiden reduzierten

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{pmatrix}$$

äquivalent, wo auf der rechten Seite $\varepsilon = \pm 1$ ist.

Es sei nämlich S ein ganz beliebiges orthogonales System, dann kann es so mit den elementaren Systemen (1) hinten komponiert werden, daſs alle Glieder oberhalb der Diagonale verschwinden. Zunächst können wir voraussetzen, daſs in der ersten Zeile mindestens ein Glied $\gtrless 0$ ist, da ja die Determinante von S von Null verschieden ist. Es sei also etwa λ oder μ nicht gleich Null. Dann bestimme man zunächst die Konstanten α, β des Systemes E_{12} so, daſs in dem Kompositionsresultate

$$\begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & 0 \\ -\beta, & \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,\alpha - \mu\,\beta, & \lambda\,\beta + \mu\,\alpha, & \nu \\ \lambda'\,\alpha - \mu'\,\beta, & \lambda'\,\beta + \mu'\,\alpha, & \nu' \\ \lambda''\alpha - \mu''\beta, & \lambda''\beta + \mu''\alpha, & \nu'' \end{pmatrix}$$

das in der ersten Zeile an zweiter Stelle stehende Glied verschwindet, während das erste positiv ist, d. h. so, daſs die drei Bedingungen

$$\lambda\alpha - \mu\beta > 0, \quad \lambda\beta + \mu\alpha = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

erfüllt sind. Diesen Bedingungen wird durch die Bestimmung

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}, \quad \beta = -\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

genügt, wo unter $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ der positive Wert dieser nach der Voraussetzung nicht verschwindenden Quadratwurzel verstanden werden soll. Hierdurch geht das System S über in eines, dessen erste Zeile die Form

$$(l, \ 0, \ l'')$$

besitzt, und in welchem auſserdem l positiv ist.

Dieses neue System kann man nun durch Komposition mit dem zweiten Elementarsysteme so umformen, daſs auch an die Stelle von l'' die Null tritt, während das erste Glied das positive Vorzeichen behält. Dadurch erhält man also ein neues orthogonales System von der Form

$$\begin{pmatrix} l, & 0, & 0 \\ l', & m', & n' \\ l'', & m'', & n'' \end{pmatrix}.$$

In diesem muſs mindestens eine der beiden Gröſsen m' und n' von Null verschieden sein, da andernfalls die Determinante verschwinden

würde. Durch Komposition mit einem geeigneten dritten Elementarsysteme E_{23} kann man also auch n' zum Verschwinden bringen, und zwar so, daſs $m' > 0$ bleibt. Jedes orthogonale System kann also durch Komposition mit den drei Elementarsystemen auf die Form

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \mathfrak{l}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}', & \mathfrak{m}', & 0 \\ \mathfrak{l}'', & \mathfrak{m}'', & \mathfrak{n}'' \end{pmatrix}$$

gebracht werden, wo $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}'$ positive Zahlen sind. Da aber $\mathfrak{S}$ ebenfalls orthogonal ist, so muſs

$$\mathfrak{S}\bar{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{l}, & 0, & 0 \\ \mathfrak{l}', & \mathfrak{m}', & 0 \\ \mathfrak{l}'', & \mathfrak{m}'', & \mathfrak{n}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{l}, & \mathfrak{l}', & \mathfrak{l}'' \\ 0, & \mathfrak{m}', & \mathfrak{m}'' \\ 0, & 0, & \mathfrak{n}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

sein, und hieraus folgt, es muſs von selbst

$$\mathfrak{l}^2 = 1, \quad \mathfrak{m}'^2 = 1, \quad \mathfrak{n}''^2 = 1, \quad \mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'' = \mathfrak{m}'' = 0$$

sein; da aber auſserdem $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}'$ positiv sind, so folgt

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{m}' = 1, \quad \mathfrak{n} = \varepsilon = \pm 1.$$

Für jedes orthogonale System besteht also in der Tat eine Kompositionsgleichung von der Form

$$S \cdot E_{12} \cdot E_{31} \cdot E_{23} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{pmatrix} = (\varepsilon),$$

oder auch, wenn man die Elementarsysteme auf die rechte Seite schafft,

$$S = (\varepsilon)\, E'_{23} E'_{31} E'_{12},$$

wo jetzt die rechts stehenden orthogonalen Systeme wieder elementar sind, da sie bezw. zu E_{23}, E_{31}, E_{12} reziprok sind.

Geht man endlich von den Systemen zu ihren Determinanten über, so ergibt sich, da die drei Elementarsysteme die Determinante 1 haben und $|\varepsilon| = \varepsilon$ ist

$$\varepsilon = |S| = \pm 1.$$

Je nachdem also das orthogonale System S die Determinante $+1$ oder -1 besitzt, geht dasselbe aus einem der beiden reduzierten Systeme (ε) auf S. 212 durch Komposition mit drei geeignet gewählten Elementarsystemen hervor.

Hat nun S zunächst die Determinante 1, so daſs also

$$S = E'_{23} E'_{31} E'_{12}$$

ist, so entspricht jede der drei Substitutionen E'_{23}, E'_{31}, E'_{12} für sich betrachtet einer Drehung von K' um die x-, y-, z-Achse um einen

bestimmten Winkel. Ist also $|S| = 1$, so kann der Körper K' aus der vereinigten Lage seiner Achsen mit denen von K durch drei Drehungen um seine x'-Achse, hierauf um seine y'- und endlich um seine z'-Achse so gedreht werden, daſs die entsprechenden Punkte koinzidieren.

Ist dagegen $|S| = -1$, so muſs vor der Vornahme jener drei Drehungen zunächst die Richtung einer der Achsen, z. B. der z-Achse, geändert werden; in diesem Falle kann K' nicht durch Drehung mit K in zusammenfallende Lage gebracht werden.

Denkt man sich K und K' im ersten Falle in der Lage, daſs alle entsprechenden Punkte zusammenfallen, und besitzt derselbe Punkt P in Bezug auf K und K' die Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z'), so bestehen zwischen ihnen die Gleichungen

$$x' = \lambda x + \mu y + \nu z,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

wo $S \cdot \bar{S} = 1$ und $|S| = +1$ ist. Diese Gleichungen repräsentieren also die allgemeinste Koordinatentransformation für rechtwinklige Koordinaten mit Beibehaltung des Anfangspunktes. Ist dagegen $|S| = -1$, so hat man auſser der Drehung noch eine Richtungsänderung, etwa die der z-Achse, vorzunehmen, um K in K' überzuführen.

Ist 0 der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystemes K, und wählt man auf der positiven x-, y- und z-Achse je einen Punkt 1, 2 und 3, so erhält man ein Fundamentaltetraeder 0, 1, 2, 3. Wir wollen K als ein Koordinatensystem der ersten oder der zweiten Art bezeichnen, je nachdem von dem Punkte 3 aus gesehen die Umlaufsrichtung $0 \ldots 1 \ldots 2$ um das Dreieck 0, 1, 2 die positive oder die negative ist.

Ist dann K' ein anderes System mit dem Anfangspunkte $0'$, und wählt man $1', 2', 3'$ auf den drei Achsen mit den gleichen Abständen von $0'$ wie bezw. 1, 2, 3 von 0, so lehren die Betrachtungen auf S. 206 und 213, daſs man durch Verschiebung und Drehung von K' die Punkte $0', 1', 2'$ und 0, 1, 2 zur Deckung bringen kann, und daſs dann $3'$ und 3 und damit auch K' und K dann und nur dann koinzidieren, wenn beide Systeme nach der obigen Definition von derselben Art sind. Zwei Koordinatensysteme K und K' sind also von derselben Art oder nicht, je nachdem in den Transformationsformeln $|S| = +1$ oder $|S| = -1$ ist. Wir werden im folgenden immer ein Koordinatensystem erster Art voraussetzen, d. h. annehmen, daſs von einem Punkte oberhalb der xy-Ebene aus gesehen der Umlaufssinn $0 \ldots 1 \ldots 2$ der positive ist.

Dreizehnte Vorlesung.

Berechnung des Tetraedervolumen aus den Koordinaten seiner Ecken. — Anwendungen. — Die Gleichung der Ebene im Raume. — Die *Hesse*sche Normalform für die Gleichung der Ebene. — Das Tetraeder. — Berechnung des Tetraedervolumen aus Länge und Richtung von drei zusammenstoſsenden Kanten. — Der Sinus einer körperlichen Ecke. — Grundeigenschaften des *Staudt*schen Sinus. — Bestimmung des Produktes zweier Tetraedervolumina aus Länge und Richtung der Kanten je einer Ecke. — Berechnung des Tetraedervolumen aus der Gröſse und Stellung von drei zusammenstoſsenden Flächen. — Das Produkt zweier Tetraedervolumina aus der Gröſse von je drei zusammenstoſsenden Flächen und den Winkeln derselben. — Berechnung des Tetraedervolumen aus seinen sechs Kanten. — Folgerungen.

§ 1.

Die Entwickelungen des vorigen Abschnittes sollen nun benützt werden, um das Volumen eines Tetraeders aus den Koordinaten seiner vier Eckpunkte zu berechnen.

Zunächst wählen wir das rechtwinklige Koordinatensystem erster Art K' so, daſs jener Inhalt mit Hilfe eines bekannten Satzes der Stereometrie berechnet werden kann. Es sei die eine Ecke des Tetraeders der Koordinatenanfangspunkt 0 unseres Koordinatensystemes, die positive ξ-Achse desselben gehe durch die zweite Ecke 1. Ferner möge die $\xi\eta$-Ebene die Ebene des Dreiecks 0, 1, 2 sein, und zwar möge die positive Richtung der η-Achse so gewählt sein, daſs der Punkt 2 auf der positiven Seite der ξ-Achse liegt, also eine positive Ordinate η_2 besitzt. Dann ist das Koordinatensystem eindeutig bestimmt, und die Koordinaten der Eckpunkte 0, 1, 2, 3 in Bezug auf dasselbe sind beziehlich

$$(0,\,0,\,0),\quad (\xi_1,\,0,\,0),\quad (\xi_2,\,\eta_2,\,0),\quad (\xi_3,\,\eta_3,\,\zeta_3).$$

Hier sind ξ_1 und η_2 nach der über das Koordinatensystem gemachten Festsetzung positiv, während ζ_3 positiv oder negativ ist, je nachdem der Punkt 3 in jenem Koordinatensysteme oberhalb oder unterhalb der $\xi\eta$-Ebene liegt, oder was nach der am Schlusse der vorigen Vorlesung gemachten Bemerkung offenbar dasselbe ist, je nachdem von 3 aus gesehen die Umlaufsrichtung $0\ldots1\ldots2$ um das Dreieck 0, 1, 2 als die positive oder als die negative erscheint.

Das Volumen des Tetraeders ist nun bekanntlich

$$\frac{1}{3} g \cdot h,$$

wenn g die Grundfläche, h die Höhe des Tetraeders bedeutet.

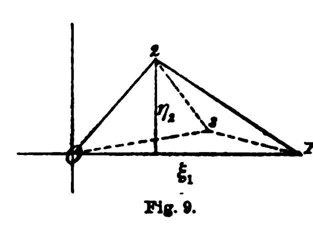


Fig. 9.

Wählen wir also für die Grundfläche g das Dreieck 0, 1, 2, so ist dessen Inhalt gleich $\frac{1}{2} \xi_1 \cdot \eta_2$; die Höhe des Tetraeders ist dann gleich der Entfernung des Punktes 3 von der Ebene $\overline{0, 1, 2}$, d. h. gleich $\pm \zeta_3$, je nachdem der Punkt 3 oberhalb oder unterhalb der $\xi\eta$-Ebene liegt. Setzt man also

$$T = \frac{1}{6} \xi_1 \eta_2 \zeta_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \xi_1, & 0, & 0 \\ \xi_2, & \eta_2, & 0 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

so ist diese Determinante ihrem absoluten Werte nach gleich dem Volumen des Tetraeders, und ihr Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt 3 in dem Koordinatensysteme K' auf der positiven oder auf der negativen Seite der $(\xi\eta)$-Ebene liegt.

Man hat daher den Satz:

Die Determinante $\begin{vmatrix} \xi_1, & 0, & 0 \\ \xi_2, & \eta_2, & 0 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{vmatrix}$ ist eine Zahl, welche ihrem absoluten Werte nach den sechsfachen Inhalt des Tetraeders 0, 1, 2, 3 darstellt und durch ihr Vorzeichen angibt, ob die Umlaufsrichtung $0 \ldots 1 \ldots 2$, von 3 aus gesehen, die positive oder die negative ist.

Beziehen wir nun die Tetraederecken auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem K erster Art, dessen Anfangspunkt aber wieder mit 0 zusammenfallen möge, so kann dasselbe durch Drehung mit K' zur Deckung gebracht werden. Sind also (x, y, z) und (ξ, η, ζ) die Koordinaten eines und desselben Punktes P in Bezug auf K und auf K', so sind diese durch Gleichungen von der folgenden Form miteinander verbunden

$$\begin{aligned} x &= \lambda\ \xi + \mu\ \eta + \nu\ \zeta \\ y &= \lambda'\xi + \mu'\eta + \nu'\zeta \\ z &= \lambda''\xi + \mu''\eta + \nu''\zeta, \end{aligned}$$

wo $S = \begin{pmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{pmatrix}$ ein orthogonales System der ersten Art, d. h. ein solches ist, dessen Determinante gleich $+1$ ist. Sind nun die

Koordinaten der vier Eckpunkte 0, 1, 2, 3 in Bezug auf dieses System beziehlich gleich

$$(0, 0, 0), \quad (x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3),$$

so hängen die Koordinaten der drei Punkte 1, 2, 3 in jenen beiden Systemen miteinander durch die folgenden Gleichungen zusammen

$$\begin{pmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \lambda', & \lambda'' \\ \mu, & \mu', & \mu'' \\ \nu, & \nu', & \nu'' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \xi_1, & 0, & 0 \\ \xi_2, & \eta_2, & 0 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda, & \lambda', & \lambda'' \\ \mu, & \mu', & \mu'' \\ \nu, & \nu', & \nu'' \end{pmatrix}.$$

Geht man nun hier von den Systemen zu ihren Determinanten über, so erhält man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = \xi_1 \eta_2 \zeta_3 = \begin{vmatrix} \xi_1, & 0, & 0 \\ \xi_2, & \eta_2, & 0 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

und hieraus folgt durch Vergleichung mit dem Theoreme auf S. 216 der Satz:

Sind (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) die Koordinaten dreier beliebiger Punkte 1, 2, 3 im Raume, so gibt die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

durch ihren absoluten Wert das sechsfache Volumen des durch die drei Punkte und den Anfangspunkt gebildeten Tetraeders, während ihr Vorzeichen das positive oder negative ist, je nachdem von 3 aus gesehen die Umlaufsrichtung 0 . . . 1 . . . 2 positiv oder negativ ist, je nachdem also der Punkt 3 auf der positiven oder auf der negativen Seite des Dreiecks 0, 1, 2 liegt. Der hier gefundene sechsfache Inhalt mit dem soeben bestimmten Vorzeichen soll zur Abkürzung durch das Symbol

$$(0, 1, 2, 3)$$

bezeichnet werden.

Hieraus kann man unmittelbar den Inhalt eines Tetraeders 0, 1, 2, 3 finden, dessen Ecken 0, 1, 2, 3 in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Koordinaten (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) besitzen. Betrachtet man dasselbe nämlich in

Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Achsen dem vorigen parallel sind, und dessen Anfangspunkt in 0 liegt, so sind für dieses die Koordinaten jener vier Punkte beziehlich

$$(0, 0, 0),\ (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),\ (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0),$$
$$(x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0),$$

und das gesuchte sechsfache Volumen ist demnach

$$(0, 1, 2, 3) = \begin{vmatrix} x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante kann viel einfacher als Determinante vierter Ordnung geschrieben werden, denn sie ist offenbar gleich

$$(1) \quad (0, 1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & x_1 - x_0, & y_1 - y_0, & z_1 - z_0 \\ 1, & x_2 - x_0, & y_2 - y_0, & z_2 - z_0 \\ 1, & x_3 - x_0, & y_3 - y_0, & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x_0, & y_0, & z_0 \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}.$$

Aus den Grundeigenschaften der Determinanten vierter Ordnung geht hervor, daſs der Ausdruck (0, 1, 2, 3) sein Zeichen wechselt, sobald irgend zwei Tetraederecken miteinander vertauscht werden; ferner folgt, daſs

$$(0, 1, 2, 3) = -(3, 0, 1, 2) = +(2, 3, 0, 1) = -(1, 2, 3, 0)$$

ist.

Ersetzt man die Koordinaten einer Tetraederecke, etwa die von 0, durch die laufenden Koordinaten x, y, z eines Punktes P, so liegen alle Punkte P, deren Koordinaten der Gleichung

$$(2) \qquad (P, 1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

genügen, auf der durch das Dreieck (1, 2, 3) bestimmten Ebene; denn für sie und nur für sie verschwindet der Inhalt des Tetraeders (P, 1, 2, 3). Ebenso stellt die Gleichung

$$(2\text{a}) \qquad (P, 1, 2, 3) = \text{const.}$$

die Gleichung einer ganz bestimmten Ebene dar, welche der durch das Dreieck (1, 2, 3) bestimmten parallel ist; denn ihr genügen die Koordinaten aller und nur derjenigen Punkte, für welche das sechsfache Volumen des Tetraeders (P, 1, 2, 3) einen und denselben Wert besitzt, und welche zugleich auf einer und derselben Seite jener Ebene liegen.

Entwickelt man diese Gleichung (2a) nach der ersten Horizontalreihe, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3}$$

d. h. eine lineare Gleichung zwischen den rechtwinkligen Koordinaten von P. Umgekehrt stellt jede solche Gleichung eine ganz bestimmte Ebene dar. Um den Nachweis dafür zu geben, bringen wir die Gleichung (3) auf die für die Anwendungen ganz besonders brauchbare sogenannte *Hesse*sche Normalform, in der jeder der vier Gleichungskoeffizienten eine anschauliche geometrische Bedeutung besitzt. Wir setzen voraus, dafs nicht alle drei Koeffizienten a, b, c zugleich Null sind, da sonst die Koordinaten keines endlichen Punktes die Gleichung befriedigen würden, dividieren die Gleichung durch denjenigen Wert von $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, dessen Vorzeichen dem von d entgegengesetzt ist, und setzen dann

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos\beta, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos\gamma, \tag{4}$$
$$\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = -p,$$

so dafs die Gleichung übergeht in

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{5}$$

wo

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist.

Ist nun $\overline{OP} = r$ eine beliebig gerichtete Strecke, deren Anfangspunkt mit dem Nullpunkt zusammenfallen möge, und sind (λ, μ, ν) die Winkel, welche r mit den positiven Achsenrichtungen bildet, so ist bekanntlich stets

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1;$$

sind umgekehrt λ, μ, ν drei Winkel, zwischen deren Kosinus diese Gleichung besteht, so bestimmen sie eindeutig eine Richtung $\overline{OP}$, nämlich die der Diagonale desjenigen rechtwinkligen Parallelepipedon, dessen eine Ecke O ist, und dessen Kanten OA, OB, OC in den drei Koordinatenachsen liegen und bezw. gleich $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ sind. Also wird auch durch die drei in (4) eingeführten Winkel α, β, γ eine Richtung ϱ eindeutig bestimmt.

Es sei nun P ein beliebiger Punkt, dessen Koordinaten (x, y, z) der Gleichung (5) genügen, es sei ferner $OP = r$ und λ, μ, ν die Winkel von OP mit den Koordinatenachsen. Dann ist

$$x = r\cos\lambda, \quad y = r\cos\mu, \quad z = r\cos\nu,$$

und die Substitution dieser Werte in (5) ergibt

$$r(\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma) = p,$$

d. h. für alle diese Punkte P besteht die Gleichung

$$r\cos(r,\, \varrho) = p.$$

Die Entfernung eines beliebigen Punktes P vom Koordinatenanfangspunkte ist also stets größer als p, und dann und nur dann gleich p, wenn r mit ϱ zusammenfällt. Der Gleichung (1) genügen also alle und nur die Punkte P derjenigen Ebene E, die auf der Linie ϱ im Abstande p vom Anfangspunkte senkrecht steht.

> Jede Gleichung $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ stellt also eine Ebene dar, deren senkrechter Abstand vom Anfangspunkte gleich p ist, und die mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet.

Wir wollen nun weiter untersuchen, welchen Wert der Ausdruck

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$

erhält, wenn man für x, y, z die Koordinaten ξ, η, ζ eines außerhalb E liegenden Punktes P substituiert.

Betrachten wir diejenige Ebene E', welche parallel zu der ursprünglichen E durch den Punkt $P = (\xi, \eta, \zeta)$ gezogen ist, so wird deren Gleichung

$$\text{(5a)} \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0,$$

wo p' ihren senkrechten Abstand vom Anfangspunkte bedeutet. Ist aber δ der senkrechte Abstand des Punktes P von der ursprünglichen Ebene, positiv oder negativ genommen, je nachdem P auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der Ebene liegt, wie der Koordinatenanfangspunkt, so ist stets $p' = p - \delta$.

Ersetzt man also (x, y, z) in der Gleichung (5a) durch die Koordinaten (ξ, η, ζ) von P, und p' durch $p - \delta$, so ergibt sich aus ihr für δ die Darstellung

$$\delta = -(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma - p).$$

Es gilt also der Satz:

> Substituiert man in die linke Seite der Gleichung (5) einer Ebene E in der *Hesse*schen Normalform die Koordinaten eines beliebigen Punktes P, so stellt sie den senkrechten Abstand desselben von jener Ebene dar und zwar mit dem negativen oder dem positiven Vorzeichen, je nachdem P auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite von E liegt, wie der Anfangspunkt.

§ 2.

Durch die im vorigen Abschnitte durchgeführte Betrachtung des Tetraedervolumen fanden wir die Gleichung einer durch drei ihrer Punkte 1, 2, 3 bestimmten Ebene in der folgenden Form

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(1) \quad x\,|y_1, z_1, 1| + y\,|z_1, x_1, 1| + z\,|x_1, y_1, 1| - |x_1, y_1, z_1| = 0,$$

wo die Koeffizienten die Unterdeterminanten der obigen Determinante vierter Ordnung bei ihrer Entwickelung nach den Elementen der ersten Zeile sind.

Um die geometrische Bedeutung jener vier Koeffizienten zu finden, bringen wir die Gleichung (1) durch Division mit

$$W = \sqrt{|y_1, z_1, 1|^2 + |z_1, x_1, 1|^2 + |x_1, y_1, 1|^2}$$

auf die *Hesse*sche Normalform. Da in dieser Form das konstante Glied gleich dem senkrechten Abstande p der Ebene vom Nullpunkte ist, so ergibt sich die Gleichung

$$p = \frac{|x_1, y_1, z_1|}{W}.$$

Nun ist aber die im Zähler stehende Determinante gleich dem sechsfachen Inhalte (0, 1, 2, 3) des Tetraeders, und da dieser anderseits auch gleich dem doppelten Produkte aus seiner Grundfläche, d. h. dem Dreieck 1, 2, 3 und seiner Höhe p ist, so ergibt sich aus der obigen Gleichung

$$(2) \quad W = \sqrt{|y_1, z_1, 1|^2 + |z_1, x_1, 1|^2 + |x_1, y_1, 1|^2} = (1, 2, 3),$$

wenn (1, 2, 3) wieder wie auf S. 182 den doppelten Inhalt des Dreiecks 1, 2, 3 bezeichnet. Der Ausdruck W stellt also den doppelten Flächeninhalt des beliebig im Raume angenommenen Dreiecks 1, 2, 3 dar.

Um nun die geometrische Bedeutung der in dieser Gleichung auftretenden Quadratwurzel zu finden, projizieren wir das Dreieck 1, 2, 3 auf jede der drei Koordinatenebenen. Betrachten wir nur das Projektionsdreieck 1′, 2′, 3′ in der yz-Ebene, so sind die Koordinaten seiner Ecken beziehlich (y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3); also wird seine doppelte Inhaltszahl durch die Determinante $|y_1, z_1, 1|$ ausgedrückt. Da nun für die Inhaltszahlen der beiden anderen Projektionsdreiecke offenbar die analogen Ausdrücke gelten, so ergibt sich der Satz:

Die Inhaltszahl $(1, 2, 3)$ irgend eines Dreiecks im Raume ist gleich der Quadratwurzel aus der Quadratsumme seiner Projektionen auf die drei Koordinatenebenen.

Da ferner bei der Division der Gleichung (1) durch $W = (1, 2, 3)$ die Koeffizienten von x, y und z bezw. gleich $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ werden, wenn z. B. α den Winkel der Ebenennormalen mit der x-Achse oder, was dasselbe ist, den Winkel der Dreiecksebene mit der yz-Ebene bedeutet u. s. w., so ergeben sich die Gleichungen

$$(1, 2, 3)\cos\alpha = |y_1, z_1, 1|, \quad (1, 2, 3)\cos\beta = |z_1, x_1, 1|,$$
$$(1, 2, 3)\cos\gamma = |x_1, y_1, 1|,$$

und aus ihnen folgt unmittelbar der Satz:

Projiziert man ein beliebig im Raume liegendes Dreieck 1, 2, 3 senkrecht auf eine beliebige andere Ebene, so ist die Inhaltszahl des Projektionsdreiecks $1', 2', 3'$ gleich der des ursprünglichen, multipliziert mit dem Kosinus des Neigungswinkels der Dreiecksebene und der Projektionsebene.

Derselbe Satz gilt dann, wie leicht zu beweisen ist, auch für die Projektion einer beliebigen ebenen Figur auf eine andere Ebene, da diese stets in Dreiecke zerlegt werden kann.

Wir stellen uns nun die weitere Aufgabe, den Inhalt eines Tetraeders 0, 1, 2, 3 aus den Längen und Richtungen von drei zusammenstofsenden Kanten desselben zu berechnen, eine Aufgabe, welche sofort auf die früher gelöste zurückgeführt werden kann. Wir nehmen an, dafs die Ecke 0 des Tetraeders der Koordinatenanfangspunkt ist. Bezeichnen wir dann in dem Tetraeder 0, 1, 2, 3 die Längen der drei Kanten $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$ mit r_1, r_2, r_3 und die Winkel jener drei Kanten mit den Koordinatenachsen beziehlich durch $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, so sind die Koordinaten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) der Punkte 1, 2, 3 gegeben durch die Gleichungen

$$x_i = r_i\cos\alpha_i, \quad y_i = r_i\cos\beta_i, \quad z_i = r_i\cos\gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Setzt man aber diese Werte in die Determinante $|x_i, y_i, z_i|$ ein, welche den sechsfachen Inhalt V des Tetraeders 0, 1, 2, 3 angibt, so erhält man die Gleichung

$$(3) \qquad 6V = r_1 r_2 r_3 \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Das sechsfache Volumen des Tetraeders 0, 1, 2, 3 ist also gleich dem Produkte dreier zusammenstofsender Kanten, multipliziert mit einer Determinante, deren Elemente nur von den Richtungen der

Kanten abhängen. Um ihre geometrische Bedeutung zu suchen, betrachten wir den Inhalt V_0 eines Tetraeders, dessen Kanten den vorigen parallel sind, die aber sämtlich die Länge 1 haben; für dieses Tetraeder liegen also die Punkte 1, 2, 3 auf der Fläche der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kugel. Dann ist $6 V_0$ genau gleich jener aus den Richtungskosinus gebildeten Determinante.

Diese Determinante besitzt in der Geometrie der Ebene ein vollständiges Analogon: Sind nämlich r_1 und r_2 die Seiten eines Dreiecks und (α_1, β_1), (α_2, β_2) die Winkel, welche r_1 und r_2 mit den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystemes in der Ebene des Dreiecks bilden, so ist der doppelte Dreiecksinhalt

$$2J = r_1 r_2 \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 \sin(r_1, r_2),$$

wo $\sin(r_1, r_2)$ nur von der Richtung der beiden Seiten abhängt und als der doppelte Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks definiert werden kann, dessen Seiten den vorigen parallel sind, die aber die Länge 1 besitzen.

Die Analogie dieses Ausdruckes mit der beim Tetraederinhalte auftretenden Determinante hat nun *v. Staudt* im Jahre 1842 dazu geführt, jener Determinante einen besonderen Namen zu geben; er nennt sie den Sinus der durch die Kanten r_1, r_2, r_3 gebildeten Ecke und schreibt dieselbe in der Form

$$\sin(r_1, r_2, r_3) = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Dann schreibt sich der vorher gefundene Ausdruck (3) für das Volumen des Tetraeders, völlig analog dem vorher für das Dreieck angegebenen, folgendermaßsen

$$6V = r_1 r_2 r_3 \sin(r_1, r_2, r_3). \tag{3a}$$

Denkt man sich endlich das Koordinatensystem parallel mit sich selbst verschoben, wobei sich weder die Seitenlängen, noch der Sinus der Ecke ändert, so ergibt sich der Satz:

> Das sechsfache Volumen eines Tetraeders ist gleich dem Produkte der drei von einer beliebigen Ecke ausgehenden Kanten, multipliziert mit dem Sinus jener Ecke.

Aus der geometrischen Bedeutung des *Staudt*schen Sinus geht hervor, daſs $\sin(r_1, r_2, r_3)$ wie der gewöhnliche Sinus stets zwischen ± 1 liegt, und aus (4) folgt ferner, daſs die obere Grenze für die rechtwinklige Ecke erreicht wird.

Um uns von diesen Tatsachen durch bloſse Rechnung zu überzeugen, beweisen wir, daſs das Quadrat dieser Determinante höchstens gleich Eins ist. Komponieren wir aber die Determinante (4) hinten mit der ihr gleichen Determinante des konjugierten Systemes, so ergibt eine einfache Rechnung die Gleichung

$$\sin^2(r_1, r_2, r_3) = |\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1| \cdot |\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3|$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & c, & b \\ c, & 1, & a \\ b, & a, & 1 \end{vmatrix} = 1 - (a^2 + b^2 + c^2) + 2abc,$$

wenn

$$a = \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 = \cos(r_2, r_3)$$

ist und entsprechend $b = \cos(r_3, r_1)$ und $c = \cos(r_1, r_2)$ gesetzt wird. Die drei Zahlen a, b, c sind demnach positive oder negative echte Brüche. Ist also abc negativ, so ist $\sin^2(r_1, r_2, r_3)$ sicher $\leqq 1$. Ist aber jenes Produkt positiv, so muſs mindestens einer seiner drei Faktoren positiv sein. Ist das a, so ist auch $bc > 0$, und aus der Gleichung

$$\sin^2(r_1, r_2, r_3) = (1 - a^2) - (b - c)^2 - 2bc(1 - a)$$

folgt wieder, daſs jene Gröſse sicher kleiner ist als Eins. Ebenso leicht erkennt man aus diesen Gleichungen, daſs $\sin^2(r_1, r_2, r_3)$ dann und nur dann den höchsten Wert 1 erreicht, wenn $a = b = c = 0$ ist, d. h. wenn die Richtungen r_1, r_2, r_3 aufeinander senkrecht stehen.

Das Rechnen mit den *Staudt*schen Sinus ist nichts weiter als ein Rechnen mit speziellen Determinanten, oder was dasselbe ist, mit Tetraedern auf der Einheitskugel, ebenso wie in der Trigonometrie das Rechnen mit gewöhnlichen Sinus nur ein Rechnen mit gleichschenkligen Dreiecken im Einheitskreise ist; auch hier wird durch die Determinantentheorie die Trigonometrie entbehrlich gemacht.

Als erste Anwendung stellen wir uns die Aufgabe, mit Hilfe der *Staudt*schen Sinus das Produkt zweier Tetraedervolumina 0, 1, 2, 3 und 0′, 1′, 2′, 3′ durch die Längen und Richtungen der Kanten je einer Ecke auszudrücken.

Es seien (s_1, s_2, s_3) und $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die von den Ecken 0 und 0′ ausgehenden Kanten und

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1', & \beta_1', & \gamma_1' \\ \alpha_2', & \beta_2', & \gamma_2' \\ \alpha_3', & \beta_3', & \gamma_3' \end{pmatrix}$$

die Winkel, welche dieselben mit den Koordinatenachsen bilden. Multipliziert man dann die Inhaltsdeterminante

$$6\,V = s_1\,s_2\,s_3 \begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}$$

mit der Inhaltsdeterminante für das zweite Tetraeder

$$6\,V' = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \begin{vmatrix} \cos\alpha_1', & \cos\alpha_2', & \cos\alpha_3' \\ \cos\beta_1', & \cos\beta_2', & \cos\beta_3' \\ \cos\gamma_1', & \cos\gamma_2', & \cos\gamma_3' \end{vmatrix},$$

so ergibt sich wie vorher nach dem Multiplikationssatz die Gleichung

$$36\,V\,V' = s_1\,s_2\,s_3\cdot\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\cdot \begin{vmatrix} \cos(s_1,\sigma_1), & \cos(s_1,\sigma_2), & \cos(s_1,\sigma_3) \\ \cos(s_2,\sigma_1), & \cos(s_2,\sigma_2), & \cos(s_2,\sigma_3) \\ \cos(s_3,\sigma_1), & \cos(s_3,\sigma_2), & \cos(s_3,\sigma_3) \end{vmatrix}$$

$$= s_1\,s_2\,s_3\cdot\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\cdot \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13} \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23} \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33} \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung allgemein

$$c_{ik} = \cos(s_i,\sigma_k) = \cos\alpha_i\cos\alpha_k' + \cos\beta_i\cos\beta_k' + \cos\gamma_i\cos\gamma_k'$$

gesetzt ist.

Fallen speziell beide Tetraeder zusammen, so erhält man genau wie oben

$$36\,V^2 = s_1^2\,s_2^2\,s_3^2 \begin{vmatrix} 1, & c, & b \\ c, & 1, & a \\ b, & a, & 1 \end{vmatrix} = s_1^2\,s_2^2\,s_3^2\bigl(1-(a^2+b^2+c^2)+2abc\bigr),$$

wenn wieder a, b, c die Kosinus der Winkel (r_2, r_3), (r_3, r_1) und (r_1, r_2) bedeuten.

Ebenso wie wir den Inhalt eines Tetraeders aus drei zusammenstoßenden Kanten und dem Sinus der eingeschlossenen Ecke berechnet haben, sind wir auch imstande, den Inhalt desselben aus drei zusammenstoßenden Seitenflächen und aus der von ihnen eingeschlossenen Ecke zu berechnen.

Zu dem Zwecke betrachten wir wieder das Tetraeder 0, 1, 2, 3, dessen Spitze 0 im Koordinatenanfangspunkte liegen möge. Dann ist sein sechsfacher Inhalt gleich der aus dem Systeme

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{pmatrix}$$

gebildeten Determinante. Bildet man nun das zu diesem adjungierte System

$$(5a)\qquad \begin{pmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ Y_1, & Y_2, & Y_3 \\ Z_1, & Z_2, & Z_3 \end{pmatrix},$$

dessen Elemente also die Unterdeterminanten zweiter Ordnung des vorigen Systemes sind, so ist nach der auf S. 143 bewiesenen *Lagrange*schen Determinantenrelation

$$|X_1, X_2, X_3| = |x_1, y_1, z_1|^2 = 6^2 \cdot V^2.$$

Nun kann man aber leicht die neun Unterdeterminanten (5a) ausdrücken durch die drei in 0 zusammenstoſsenden Seitenflächen (0, 1, 2), (0, 2, 3), (0, 3, 1) und deren Neigungswinkel zu den drei Koordinatenebenen. So ist z. B.

$$X_1 = \begin{vmatrix} y_2, & z_2 \\ y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

die doppelte Projektion des Dreiecks (0, 2, 3) auf die YZ-Ebene, und entsprechende geometrische Bedeutung besitzen alle anderen acht Unterdeterminanten. Bezeichnet man also die Inhaltszahlen der drei Dreiecke

0, 2, 3, 0, 3, 1, 0, 1, 2 beziehlich durch f_1, f_2, f_3

und die Winkel dieser drei Tetraederebenen mit den Koordinatenebenen beziehlich durch

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{matrix}$$

so daſs also z. B. $a_1 = (f_1, YZ)$ der Winkel ist, den die Tetraederfläche f_1 mit der YZ-Ebene bildet, u. s. w., so ergibt sich für das adjungierte System die folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ Y_1, & Y_2, & Y_3 \\ Z_1, & Z_2, & Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f_1 \cos a_1, & 2f_2 \cos a_2, & 2f_3 \cos a_3 \\ 2f_1 \cos b_1, & 2f_2 \cos b_2, & 2f_3 \cos b_3 \\ 2f_1 \cos c_1, & 2f_2 \cos c_2, & 2f_3 \cos c_3 \end{pmatrix},$$

und wenn man auf beiden Seiten zu den Determinanten übergeht, so erhält man

$$(6)\qquad 3^2 V^2 = 2 f_1 f_2 f_3 \begin{vmatrix} \cos a_1, & \cos a_2, & \cos a_3 \\ \cos b_1, & \cos b_2, & \cos b_3 \\ \cos c_1, & \cos c_2, & \cos c_3 \end{vmatrix}.$$

Die hier auftretende Determinante kann offenbar ebenfalls als ein *Staudt*scher Sinus geschrieben werden. Wir wollen ihn durch $\sin(f_1, f_2, f_3)$ bezeichnen. Sind R_1, R_2, R_3 die drei Normalen zu f_1, f_2, f_3, so ist z. B. $a_1 = (f_1, YZ) = (R_1, X)$, also

$$\cos(f_1, YZ) = \cos(R_1, X), \ldots,$$

und infolgedessen geht jene Determinante in $\sin(R_1, R_2, R_3)$ über. Denkt man sich also im Anfangspunkte 0 jene drei Senkrechten R_1, R_2, R_3 zu f_1, f_2, f_3 errichtet, so erhält man eine neue dreiseitige Ecke (R_1, R_2, R_3), welche wir die zu (f_1, f_2, f_3) polare Ecke nennen wollen. Dann zeigt sich also, daſs der hier auftretende *Staudt*sche Sinus gleich dem Sinus der polaren Ecke ist; man erhält somit die Gleichung

$$(7) \qquad 3^2 V^2 = 2 f_1 f_2 f_3 \sin(f_1, f_2, f_3) = 2 f_1 f_2 f_3 \sin(R_1, R_2, R_3),$$

und dieselbe Gleichung bleibt offenbar bestehen, wenn man den Koordinatenanfangspunkt beliebig verlegt.

Betrachtet man endlich, wie vorher, das Produkt $V \cdot V'$ der Volumina zweier Tetraeder 0, 1, 2, 3 und 0', 1', 2', 3', deren in 0 und 0' zusammenstoſsenden Flächen beziehlich f_1, f_2, f_3 und f_1', f_2', f_3' sein mögen, so ergibt sich aus (6)

$$(8) \qquad 3^4 V^2 V'^2 = 4 f_1 f_2 f_3 \cdot f_1' f_2' f_3' \, |\cos(f_i, f_k')|,$$

wo z. B.

$$\cos(f_1, f_1') = \cos a_1 \cos a_1' + \cos b_1 \cos b_1' + \cos c_1 \cos c_1'$$

den Kosinus des Neigungswinkels der beiden Flächen f_1 und f_1' bedeutet u. s. w., oder aus (7), wenn die zu 0' polare Ecke mit (R_1', R_2', R_3') bezeichnet wird

$$(8a) \qquad 3^4 \cdot V^2 V'^2 = 4 f_1 f_2 f_3 \cdot f_1' f_2' f_3' \sin(R_1, R_2, R_3) \cdot \sin(R_1', R_2', R_3').$$

Betrachten wir endlich wieder den speziellen Fall, daſs beide Tetraeder zusammenfallen, so erhalten wir aus der soeben gefundenen Gleichung (8) nach Ausziehung der Quadratwurzel

$$(8b) \qquad \frac{9}{2} V^2 = f_1 f_2 f_3 \begin{vmatrix} 1, & \cos(f_1, f_2), & \cos(f_1, f_3) \\ \cos(f_1, f_2), & 1, & \cos(f_2, f_3) \\ \cos(f_1, f_3), & \cos(f_2, f_3), & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Stellt man die gefundenen Ausdrücke für das Tetraedervolumen zusammen, so ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{cases} 6V = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \end{vmatrix} = r_1 r_2 r_3 \sin(r_1, r_2, r_3) \\ \frac{9}{2} V^2 = f_1 f_2 f_3 \sin(f_1, f_2, f_3). \end{cases}$$

Ähnlich wie der Inhalt eines Dreiecks auch aus allen drei Seiten, kann der Inhalt eines Tetraeders aus allen seinen sechs Kanten ge-

funden werden. Um diese wichtige Gleichung herzuleiten, verfahren wir genau wie bei der entsprechenden Frage in der Ebene.

Es seien (1, 2, 3, 4) und (5, 6, 7, 8) zwei ganz beliebige Tetraeder im Raume, und es seien

$$(x_i,\ y_i,\ z_i) \qquad (i=1,2,\ldots 8)$$

allgemein die Koordinaten ihrer Eckpunkte. Dann kann das Produkt ihrer sechsfachen Inhalte (1, 2, 3, 4) und (5, 6, 7, 8) folgendermaßen als eine Determinante fünfter Ordnung geschrieben werden

$$-(1,2,3,4)(5,6,7,8) = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1, & 0 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2, & 0 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3, & 0 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \\ x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & 0 \\ y_5, & y_6, & y_7, & y_8, & 0 \\ z_5, & z_6, & z_7, & z_8, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1x_5+y_1y_5+z_1z_5, & . & . & . & . & . & 1 \\ x_2x_5+y_2y_5+z_2z_5, & . & . & . & . & . & 1 \\ x_3x_5+y_3y_5+z_3z_5, & . & . & . & . & . & 1 \\ x_4x_5+y_4y_5+z_4z_5, & . & . & . & . & . & 1 \\ 1, & & 1, & 1, & 1, & & 0 \end{vmatrix},$$

oder in leicht verständlicher Bezeichnung

$$-(1,2,3,4)(5,6,7,8) = \begin{vmatrix} x_ix_k+y_iy_k+z_iz_k, & 1 \\ 1 & , 0 \end{vmatrix} \quad \binom{i=1,2,3,4}{k=5,6,7,8}.$$

Diese Determinante kann aber, da allgemein

$$(x_ix_k+y_iy_k+z_iz_k) - \frac{1}{2}(x_i^2+y_i^2+z_i^2) - \frac{1}{2}(x_k^2+y_k^2+z_k^2) = -\frac{1}{2}\Sigma(x_i-x_k)^2$$
$$= -\frac{1}{2}(i,k)^2 = -\frac{1}{2}s_{ik}^2 \qquad \binom{i=1,2,3,4}{k=5,6,7,8}$$

ist, genau wie auf S. 202 in die folgende Determinante umgeformt werden

$$-(1,2,3,4)(5,6,7,8) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}s_{ik}^2, & 1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn also V und V' die Inhaltszahlen jener beiden Tetraeder sind, so folgt nach einfachen Umformungen

$$(10) \qquad 8(1,2,3,4)(5,6,7,8) = 288\,V V' = \begin{vmatrix} s_{ik}^2, & 1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}.$$

Hier ist das Produkt beider Tetraeder durch die 16 Strecken s_{ik} ausgedrückt, welche von den Ecken des einen zu denen des anderen hinführen.

Betrachten wir nun den speziellen Fall, daſs beide Tetraeder zusammenfallen, so werden bei der Determinante in (10) die Diagonalglieder zu Null, während die übrigen s_{ik} gleich den Kanten des Tetraeders werden. So ergibt sich für den Inhalt eines Tetraeders mit den Kanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ (siehe die Figur) der folgende Ausdruck

Fig. 10.

$$(11) \qquad 288\, V^2 = \begin{vmatrix} 0, & c^2, & b^2, & \alpha^2, & 1 \\ c^2, & 0, & a^2, & \beta^2, & 1 \\ b^2, & a^2, & 0, & \gamma^2, & 1 \\ \alpha^2, & \beta^2, & \gamma^2, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Fallen die vier Punkte in eine Ebene, so verschwindet diese Determinante; die Gleichung

$$\Delta = 0$$

enthält also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs die vier Punkte $1, 2, 3, 4$ in einer Ebene liegen.

Ganz auf demselben Wege würde man bei fünf beliebigen Punkten $1, 2, 3, 4, 5$ im Raume finden, daſs die analog aus den zehn Entfernungen derselben gebildete Determinante 6ter Ordnung identisch verschwindet.

Betrachten wir endlich noch den speziellen Fall, daſs die beiden Tetraeder $(1, 2, 3, 4)$ und $(5, 6, 7, 8)$ einer und derselben Kugel mit dem Radius r einbeschrieben sind, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist. Dann ist identisch

$$36\, V V' = -\frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} r, & -x_1, & -y_1, & -z_1 \\ r, & -x_2, & -y_2, & -z_2 \\ r, & -x_3, & -y_3, & -z_3 \\ r, & -x_4, & -y_4, & -z_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r, & r, & r, & r \\ x_5, & x_6, & x_7, & x_8 \\ y_5, & y_6, & y_7, & y_8 \\ z_5, & z_6, & z_7, & z_8 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{r^2} \left| r^2 - (x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k) \right| \qquad \binom{i = 1, 2, 3, 4}{k = 5, 6, 7, 8};$$

oder da

$$s_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = 2[r^2 - (x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k)]$$

ist, so ergibt sich, wenn man auf beiden Seiten mit 16 multipliziert und dann rechts die Entfernungen s_{ik} einführt,

$$(12) \qquad 36 \cdot 16\, V V' = -\frac{1}{r^2} \left| s_{ik}^2 \right|,$$

wo sich die Determinante von der in (10) gefundenen nur durch das Fehlen der Ränder unterscheidet.

Fallen beide Tetraeder zusammen, so geht unsere Gleichung über in

$$(13)\qquad 36.16.V^2 = -\frac{1}{r^2}\begin{vmatrix} 0, & c^2, & b^2, & \alpha^2 \\ c^2, & 0, & a^2, & \beta^2 \\ b^2, & a^2, & 0, & \gamma^2 \\ \alpha^2, & \beta^2, & \gamma^2, & 0 \end{vmatrix},$$

wenn wieder α, β, γ drei zusammenstoſsende und a, b, c die drei α, β und γ gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders bezeichnen; und durch Ausrechnung erhält man die folgende elegante Formel für das Tetraedervolum

$$\begin{aligned}(24.V)^2 &= \frac{1}{r^2}[2(a\alpha)^2(b\beta)^2 + 2(b\beta)^2(c\gamma)^2 + 2(c\gamma)^2(a\alpha)^2 - (a\alpha)^4 - (b\beta)^4 - (c\gamma)^4] \\ &= \frac{1}{r^2}(a\alpha + b\beta + c\gamma)(-a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha - b\beta + c\gamma)(a\alpha + b\beta - c\gamma).\end{aligned}$$

Vierzehnte Vorlesung.

Definition der homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten. — Die Bedingungsgleichung für die vereinigte Lage eines Punktes und einer Ebene. — Die lineare Gleichung zwischen den homogenen Koordinaten eines Punktes. — Die quadratische Gleichung zwischen den homogenen Koordinaten einer Ebene. — Die Gleichung der Kugel in Ebenenkoordinaten. — Das Tetraedervolumen in homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten.

§ 1.

Die durchgeführten Untersuchungen über die Inhaltsbestimmung des Tetraeders legen es nahe, auch im Raume an Stelle der *Cartesi*schen Koordinaten eine neue Art der Koordinatenbestimmung einzuführen, um die auch hier auftretende Unsymmetrie in den analytischen Ausdrücken zu vermeiden; und zwar wollen wir, ähnlich wie dies in der elften Vorlesung geschah, gleichzeitig für die Punkte und für die Ebenen diese neuen sogenannten „homogenen Koordinaten“ einführen.

Zu diesem Zwecke gehen wir von einem beliebig im Raume angenommenen Tetraeder aus; seine Ecken wollen wir mit 1, 2, 3, 4 und die ihnen gegenüberliegenden Ebenen mit I, II, III, IV bezeichnen; wir wollen jene Ebenen die **Fundamental-** oder **Koordinatenebenen** nennen. Auf jeder der vier Fundamentalebenen setzen wir eine positive und eine negative Seite willkürlich fest, und den Abstand eines Punktes von einer jener Ebenen rechnen wir positiv oder negativ, je nachdem er auf der entsprechenden Seite liegt. Der Einfachheit wegen wollen wir diese Festsetzung so machen, dafs das Innere des Tetraeders immer auf der positiven Seite der betreffenden Fundamentalebene liegt, so dafs also die Abstände (1, I), (2, II), (3, III), (4, IV) der Tetraederecken von den gegenüberliegenden Fundamentalebenen positive Zahlen sind. Nimmt man dann einen Punkt 5 beliebig im Raume an, so bestimmt er mit den Flächen (2, 3, 4), (1, 3, 4), (1, 2, 4) und (1, 2, 3) des Fundamentaltetraeders zusammen vier Tetraeder, und seine Lage ist vollständig bekannt, wenn von den vier Inhaltszahlen

(1) $\quad (5, 2, 3, 4), \quad (1, 5, 3, 4), \quad (1, 2, 5, 4), \quad (1, 2, 3, 5)$

nur drei gegeben sind; denn durch die Gleichung

$$(5, 2, 3, 4) = \text{const.}$$

z. B. wird ausgesagt, dafs der Punkt 5 auf einer ganz bestimmten Parallelebene zu I sich befindet; und da das Analoge für die übrigen Gleichungen gilt, so wird durch drei solche Gleichungen jener Punkt als Durchschnittspunkt von ebensovielen Ebenen bestimmt, welche drei unter den vier Koordinatenebenen I, II, III, IV parallel laufen, also nur einen Schnittpunkt besitzen.

Sind daher die Werte aller vier Inhaltszahlen (1) gegeben, so mufs zwischen ihnen notwendig eine Relation bestehen, welche eine dieser Zahlen als Funktion der drei anderen eindeutig bestimmt.

Man könnte diese vier Inhaltszahlen selbst als die homogenen Koordinaten des Punktes 5 in Bezug auf das Fundamentaltetraeder bezeichnen; für die Anwendungen ist es aber bequemer, statt ihrer ihr Verhältnis zu der Inhaltszahl des Fundamentaltetraeders einzuführen; wir setzen deshalb

$$(2)\quad u_1 = \frac{(5, 2, 3, 4)}{(1, 2, 3, 4)}, \quad u_2 = \frac{(1, 5, 3, 4)}{(1, 2, 3, 4)}, \quad u_3 = \frac{(1, 2, 5, 4)}{(1, 2, 3, 4)}, \quad u_4 = \frac{(1, 2, 3, 5)}{(1, 2, 3, 4)}$$

und bezeichnen (u_1, u_2, u_3, u_4) als die homogenen Koordinaten des Punktes 5 in Bezug auf das Koordinatentetraeder $\overline{1, 2, 3, 4}$.

Diese Koordinaten besitzen noch eine leicht angebbare geometrische Bedeutung. Betrachtet man z. B. die beiden Tetraeder $\overline{5, 2, 3, 4}$ und $\overline{1, 2, 3, 4}$, so haben sie die Grundfläche $\overline{2, 3, 4}$ gemeinsam, ihre Volumina verhalten sich also wie die Abstände (I, 5) und (I, 1) ihrer Spitzen 5 und 1 von der gemeinsamen Grundebene I, und zwar ist jenes Verhältnis positiv oder negativ, je nachdem jene beiden Punkte auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene I liegen; das Entsprechende gilt offenbar für die drei anderen Tetraederverhältnisse. Bezeichnet man also allgemein mit

$$(\text{I}, 5), \quad (\text{II}, 5), \quad (\text{III}, 5), \quad (\text{IV}, 5)$$

die Abstände irgend eines Punktes 5 von den vier Tetraederflächen, so können die vier homogenen Koordinaten des Punktes 5 auch folgendermafsen dargestellt werden

$$(3)\qquad u_1 = \frac{(\text{I}, 5)}{(\text{I}, 1)}, \quad u_2 = \frac{(\text{II}, 5)}{(\text{II}, 2)}, \quad u_3 = \frac{(\text{III}, 5)}{(\text{III}, 3)}, \quad u_3 = \frac{(\text{IV}, 5)}{(\text{IV}, 4)},$$

wo die vier positiven Zahlen

(3a) $\quad (\mathrm{I}, 1) = h_1, \quad (\mathrm{II}, 2) = h_2, \quad (\mathrm{III}, 3) = h_3, \quad (\mathrm{IV}, 4) = h_4$

die vier Höhen des Fundamentaltetraeders bedeuten.

Statt der obigen Quotienten hätte man auch die Abstände (I, 5),... des betrachteten Punktes von den vier Tetraederflächen selbst als Koordinaten desselben einführen und dabei statt der kürzesten Abstände auch Abstände nehmen können, welche in vier von vornherein bestimmten Richtungen zu messen sind; aber die obige Definition der homogenen Punktkoordinaten ist für die folgenden Ausführungen bequemer.

Bei dieser Definition der homogenen Koordinaten sind die Koordinaten der Eckpunkte 1, 2, 3, 4 des Fundamentaltetraeders selbst beziehlich

(4)
1, 0, 0, 0 für den Eckpunkt 1
0, 1, 0, 0 „ „ „ 2
0, 0, 1, 0 „ „ „ 3
0, 0, 0, 1 „ „ „ 4.

Ferner sind die Koordinaten aller im Inneren des Tetraeders liegenden Punkte stets positive echte Brüche, während, falls der Punkt aus dem Inneren des Tetraeders durch eine der Ebenen hinausgeht, die entsprechende Koordinate offenbar vom Positiven ins Negative übergeht.

Die homogenen Koordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) eines Punktes 5 sind lineare Funktionen seiner *Cartesischen* Koordinaten (x, y, z) in Bezug auf ein beliebig gewähltes rechtwinkliges Koordinatensystem. In der Tat, sind

$$x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i + z \cos \gamma_i - p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

die Gleichungen der vier Tetraederebenen in der Normalform, so ist auch nach dem auf S. 220 unten bewiesenen Satze

$$(5) \qquad - u_i = \frac{x \cos \alpha_i + y \cos \beta_i + z \cos \gamma_i - p_i}{h_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die aus den Koeffizienten gebildete Determinante

$$(6) \qquad \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_4} \begin{vmatrix} \cos \alpha_1, & \cos \beta_1, & \cos \gamma_1, & -p_1 \\ \cos \alpha_2, & \cos \beta_2, & \cos \gamma_2, & -p_2 \\ \cos \alpha_3, & \cos \beta_3, & \cos \gamma_3, & -p_3 \\ \cos \alpha_4, & \cos \beta_4, & \cos \gamma_4, & -p_4 \end{vmatrix}$$

ist hier notwendig von Null verschieden. Wäre sie nämlich gleich Null, so könnte man vier nicht sämtlich verschwindende Zahlen q_1, q_2, q_3, q_4 so bestimmen, daſs

$$q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3 + q_4 u_4 = 0$$

wäre für jede Lage des Punktes 5; läßt man aber 5 successive mit den vier Eckpunkten zusammenfallen, so ergäbe sich wegen (4) der Reihe nach

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0,$$

was mit der vorher gemachten Annahme im Widerspruche steht.

Infolgedessen kann man nunmehr durch Auflösung der Gleichungen (5) auch die Größen x, y, z, 1 homogen und linear durch die homogenen Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 ausdrücken.

Ganz analog wie die Koordinaten eines Punktes kann man jetzt auch diejenigen einer Ebene durch ihre senkrechten Abstände von den Ecken des Koordinatentetraeders definieren. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Ebene V und fixieren auf ihr wieder willkürlich, aber fest, die positive und negative Seite. Bezeichnet man dann ihre positiv oder negativ gerechneten senkrechten Abstände von den vier Eckpunkten 1, 2, 3, 4 des Fundamentaltetraeders beziehlich durch

$$(1, \mathrm{V}), \ (2, \mathrm{V}), \ (3, \mathrm{V}), \ (4, \mathrm{V}),$$

so ist durch drei von ihnen die Ebene V, allerdings nicht eindeutig, als gemeinsame Tangentialebene an drei um jene Eckpunkte mit den betreffenden Abständen als Radien beschriebene Kugeln bestimmt. Durch den vierten Abstand wird, da die Eckpunkte nicht in einer Ebene liegen, die Bestimmung der Ebene V zu einer eindeutigen.

Auch hier wollen wir nicht jene senkrechten Abstände selbst, sondern ihre Verhältnisse zu den Tetraederhöhen betrachten, d. h. wir wollen

$$(7) \qquad U_1 = \frac{(1, \mathrm{V})}{(1, \mathrm{I})}, \quad U_2 = \frac{(2, \mathrm{V})}{(2, \mathrm{II})}, \quad U_3 = \frac{(3, \mathrm{V})}{(3, \mathrm{III})}, \quad U_4 = \frac{(4, \mathrm{V})}{(4, \mathrm{IV})}$$

als die homogenen Koordinaten der Ebene V bezeichnen.

Betrachtet man speziell die Ebenen I, II, III, IV des Fundamentaltetraeders selbst, so sind ihre Koordinaten beziehlich gleich

(8)

1, 0, 0, 0	für	die	Ebene I
0, 1, 0, 0	„	„	„ II
0, 0, 1, 0	„	„	„ III
0, 0, 0, 1	„	„	„ IV.

Sind ferner V und V' zwei parallele Ebenen und (U_1, U_2, U_3, U_4), (U_1', U_2', U_3', U_4') ihre Koordinaten, so ist

$$U_1 - U_1' = \frac{(1, \mathrm{V}) - (1, \mathrm{V}')}{(1, \mathrm{I})} = \frac{(\mathrm{V}, \mathrm{V}')}{(1, \mathrm{I})} = \frac{(\mathrm{V}, \mathrm{V}')}{h_1},$$

und analoge Gleichungen bestehen für die drei anderen Koordinatendifferenzen. Bezeichnet man also die vier Seitenflächen des Koordinatentetraeders mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ und beachtet, daſs

$$\varphi_1 h_1 = \varphi_2 h_2 = \varphi_3 h_3 = \varphi_4 h_4 = \frac{1}{2}(1, 2, 3, 4)$$

ist, so ergibt sich die Proportion

$$(9) \quad U_1 - U_1' : U_2 - U_2' : U_3 - U_3' : U_4 - U_4' = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3} : \frac{1}{h_4} = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

d. h. die Differenzen entsprechender Koordinaten von zwei parallelen Ebenen verhalten sich wie die vier Seitenflächen des Fundamentaltetraeders.

§ 2.

Durch drei der homogenen Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 eines Punktes ist seine vierte Koordinate eindeutig bestimmt, und ebenso ist durch drei der Koordinaten U_1, U_2, U_3, U_4 einer Ebene die vierte, aber allerdings nicht eindeutig, bestimmt. Es muſs daher sowohl zwischen den vier Koordinaten eines jeden Punktes, als auch zwischen denen einer jeden Geraden eine identische Relation bestehen, zu deren Herleitung wir jetzt übergehen wollen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Ebene V, deren Koordinaten U_1, U_2, U_3, U_4 gegeben sind, und suchen den senkrechten Abstand eines Punktes 5 von ihr, dessen homogene Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 sein mögen. Dieser Abstand ist eine lineare Funktion seiner rechtwinkligen, also eine homogene lineare Funktion seiner homogenen Koordinaten. Bezeichnen wir mit (V, 5) den gesuchten senkrechten Abstand, so ist also

$$(1) \qquad A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4 = (\mathrm{V}, 5),$$

wo die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, A_4 zu bestimmende Zahlen sind, welche von der Lage des Punktes 5 unabhängig sind. Dieselben ergeben sich am einfachsten dadurch, daſs man den willkürlich angenommenen Punkt 5 beziehlich mit den vier Ecken des Fundamentaltetraeders zusammenfallen läſst. Dadurch erhält man wegen (4) des § 1

$$A_1 = (\mathrm{V}, 1), \; A_2 = (\mathrm{V}, 2), \; A_3 = (\mathrm{V}, 3), \; A_4 = (\mathrm{V}, 4),$$

und die gesuchte Relation kann somit bei Berücksichtigung von (3) auf S. 232 in der Form geschrieben werden

$$(2) \quad \frac{(\mathrm{I}, 5)}{(\mathrm{I}, 1)} \cdot \frac{(\mathrm{V}, 1)}{(\mathrm{V}, 5)} + \frac{(\mathrm{II}, 5)}{(\mathrm{II}, 2)} \cdot \frac{(\mathrm{V}, 2)}{(\mathrm{V}, 5)} + \frac{(\mathrm{III}, 5)}{(\mathrm{III}, 3)} \cdot \frac{(\mathrm{V}, 3)}{(\mathrm{V}, 5)} + \frac{(\mathrm{IV}, 5)}{(\mathrm{IV}, 4)} \cdot \frac{(\mathrm{V}, 4)}{(\mathrm{V}, 5)} = 1,$$

oder wenn man mit (V, 5) multipliziert und die homogenen Koordinaten des Punktes 5 und der Linie V einführt

$$(3) \qquad h_1 u_1 U_1 + h_2 u_2 U_2 + h_3 u_3 U_3 + h_4 u_4 U_4 = (\mathrm{V}, 5).$$

Diese Gleichung kann, je nachdem die Koordinaten des Punktes oder der Ebene gegeben sind, in einer der Formen geschrieben werden

$$(3\text{a})\qquad \begin{aligned}&(\text{I}, 5)\, U_1 + (\text{II}, 5)\, U_2 + (\text{III}, 5)\, U_3 + (\text{IV}, 5)\, U_4 = (\text{V}, 5)\\ &(\text{V}, 1)\, u_1 + (\text{V}, 2)\, u_2 + (\text{V}, 3)\, u_3 + (\text{V}, 4)\, u_4 = (\text{V}, 5).\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung (3a) ist dann und nur dann gleich Null, wenn der Punkt 5 in der Ebene V liegt, wenn also Punkt und Ebene vereinigte Lage haben. Nimmt man also die Ebene V als gegeben an, so sind die Lösungen der Gleichung

$$(3\text{b})\qquad h_1 u_1 U_1 + h_2 u_2 U_2 + h_3 u_3 U_3 + h_4 u_4 U_4 = 0$$

die Koordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) aller und nur der Punkte, welche in der Ebene V liegen. Hält man umgekehrt den Punkt 5 fest, nimmt also seine Koordinaten als gegeben an, so ergibt dieselbe Gleichung die Koordinaten aller derjenigen Ebenen, welche durch 5 hindurchgehen und nur diese, d. h. die Gleichung des Punktes 5 in Linienkoordinaten.

Umgekehrt stellt aber auch jede homogene Gleichung

$$(3\text{c})\qquad a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 = 0$$

eine ganz bestimmte Ebene dar, wie man leicht erkennt, wenn man u_1, u_2, u_3, u_4 durch ihre Ausdrücke durch die rechtwinkligen Koordinaten ersetzt; und eine genau entsprechende Überlegung lehrt, daſs jede Gleichung

$$(3\text{d})\qquad A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 U_3 + A_4 U_4 = 0$$

einen ganz bestimmten Punkt darstellt. Schreibt man die vorher gefundene Gleichung (3b) in jeder der beiden Formen

$$\begin{aligned}&(\text{V}, 1)\, u_1 + (\text{V}, 2)\, u_2 + (\text{V}, 3)\, u_3 + (\text{V}, 4)\, u_4 = 0\\ &(\text{I}, 5)\, U_1 + (\text{II}, 5)\, U_2 + (\text{III}, 5)\, U_3 + (\text{IV}, 5)\, U_4 = 0,\end{aligned}$$

so erkennt man weiter, daſs im ersten Falle die Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 in (3c) den Abständen der dargestellten Ebene V von den Ecken, im zweiten Falle, daſs die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, A_4 in (3d) den Abständen des dargestellten Punktes 5 von den Seiten des Fundamentaltetraeders proportional sind.

So sind speziell

$$(4)\qquad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 0$$

die Gleichungen der vier Koordinatenebenen I, II, III, IV in Punktkoordinaten, während

$$(4\text{a})\qquad U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0$$

die Gleichungen der vier Eckpunkte 1, 2, 3, 4 in Ebenenkoordinaten darstellen.

Die Gleichung (1) liefert uns nunmehr in einfacher Weise die identische Relation, welche zwischen den homogenen Koordinaten eines beliebigen Punktes besteht. Läſst man nämlich jetzt die Ebene V ins Unendliche rücken, und beachtet dabei, daſs sich alsdann die vier Quotienten

$$\frac{(V, 1)}{(V, 5)}, \quad \frac{(V, 2)}{(V, 5)}, \quad \frac{(V, 3)}{(V, 5)}, \quad \frac{(V, 4)}{(V, 5)}$$

dem gemeinsamen Werte eins nähern, wo auch der Punkt 5 im Endlichen liegen möge, so geht die Gleichung (1) in die einfachere über

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1, \tag{5}$$

und dieses ist die gesuchte Identität.

Dieselbe Relation kann auch direkt aus der Entwickelung der identisch verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4, & z_5 \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Zeile hergeleitet werden. Hierdurch ergibt sich nämlich die Gleichung

$$(2, 3, 4, 5) - (1, 3, 4, 5) + (1, 2, 4, 5) - (1, 2, 3, 5) + (1, 2, 3, 4) = 0$$

und diese geht in die soeben gefundene Identität über, wenn man sie in der Form schreibt

$$\frac{(5, 2, 3, 4)}{(1, 2, 3, 4)} + \frac{(1, 5, 3, 4)}{(1, 2, 3, 4)} + \frac{(1, 2, 5, 4)}{(1, 2, 3, 4)} + \frac{(1, 2, 3, 5)}{(1, 2, 3, 4)} = 1. \tag{5a}$$

Geometrisch sagt dieselbe aus, daſs die algebraische Summe der Volumzahlen derjenigen vier Tetraeder, deren gemeinsame Spitze im Punkte 5 liegt, und deren Grundflächen die vier Seitenflächen des Fundamentaltetraeders sind, gleich der Volumzahl des letzteren ist. Dieser Satz ist unmittelbar evident, sobald der Punkt 5 innerhalb des Fundamentaltetraeders angenommen wird, da dann diese Inhaltszahlen dem sechsfachen positiven Volumen jener vier Tetraeder gleich sind; aber auch im allgemeinen Falle wird er selbstverständlich, wenn man beachtet, daſs, falls z. B. der Punkt 5 die Fundamentalebene (2, 3, 4) überschreitet, die zugehörige Inhaltszahl (5, 2, 3, 4) das negativ genommene sechsfache Volumen des betreffenden Tetraeders darstellt.

Weniger einfach gestaltet sich die Herleitung der identischen Relation für die Koordinaten (U_1, U_2, U_3, U_4) einer Ebene; dieselbe kann auch nicht linear sein, da ja durch die Werte von drei Koordinaten die vierte nicht **eindeutig** bestimmt ist.

Um diese zweite Relation herzuleiten, betrachten wir die Ebene V, also auch ihre homogenen Koordinaten (U_1, U_2, U_3, U_4) als gegeben, und gehen aus von den beiden aus (3a) sich ergebenden Gleichungen, welche den Abstand zweier ganz beliebiger Punkte 5 und 6 von jener Ebene ausdrücken

$$(\mathrm{I}, 5)\, U_1 + (\mathrm{II}, 5)\, U_2 + (\mathrm{III}, 5)\, U_3 + (\mathrm{IV}, 5)\, U_4 = (\mathrm{V}, 5)$$
$$(\mathrm{I}, 6)\, U_1 + (\mathrm{II}, 6)\, U_2 + (\mathrm{III}, 6)\, U_3 + (\mathrm{IV}, 6)\, U_4 = (\mathrm{V}, 6);$$

aus ihnen ergibt sich durch Subtraktion

$$(6)\quad \big((\mathrm{I}, 5) - (\mathrm{I}, 6)\big)\, U_1 + \big((\mathrm{II}, 5) - (\mathrm{II}, 6)\big)\, U_2 + \big((\mathrm{III}, 5) - (\mathrm{III}, 6)\big)\, U_3 + \big((\mathrm{IV}, 5) - (\mathrm{IV}, 6)\big)\, U_4 = (\mathrm{V}, 5) - (\mathrm{V}, 6).$$

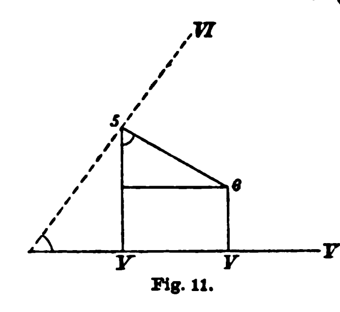


Fig. 11.

Ist nun VI eine Ebene, welche auf der Geraden $\overline{5, 6}$ senkrecht steht, so sind die in diesen Gleichungen auftretenden Differenzen den Kosinus der Neigungswinkel von VI mit den Ebenen I, II, III, IV, V proportional. In der Tat lehrt ein Blick auf die nebenstehende Figur, daſs für jede beliebige Lage der Ebene V die Gleichung besteht

$$(6\text{a})\qquad (\mathrm{V}, 5) - (\mathrm{V}, 6) = \overline{5, 6}\cos(\mathrm{V}, \mathrm{VI}).$$

Hier bedeutet $\overline{5, 6}$ den absoluten Wert der Entfernung der beiden überstrichenen Punkte, und unter (V, VI) soll ein für allemal der innere Winkel jener beiden Ebenen, d. h. derjenige verstanden werden, welcher von der positiven Seite der einen und der negativen der anderen Ebene gebildet wird. Damit die Gleichung (6a) bei dieser Festsetzung auch dem Vorzeichen nach bestehe, ist die positive Seite von VI passend zu wählen. Ist dies geschehen, und beachtet man alsdann, daſs die beiden Seiten jener Gleichung bei einer Drehung der Ebene V gleichzeitig durch Null hindurchgehend ihr Zeichen wechseln, so erkennt man, daſs jene Gleichung bestehen bleibt, wenn man die Ebene V mit einer der vier Tetraederebenen so zusammenfallen läſst, daſs ihre positiven Seiten übereinstimmen. Ersetzt man also in (6) die Differenzen

$$(\mathrm{I}, 5) - (\mathrm{I}, 6),\ (\mathrm{II}, 5) - (\mathrm{II}, 6),\ (\mathrm{III}, 5) - (\mathrm{III}, 6),\ (\mathrm{IV}, 5) - (\mathrm{IV}, 6),\ (\mathrm{V}, 5) - (\mathrm{V}, 6)$$

durch die ihnen proportionalen Kosinus

$$\cos(\mathrm{I}, \mathrm{VI}), \quad \cos(\mathrm{II}, \mathrm{VI}), \quad \cos(\mathrm{III}, \mathrm{VI}), \quad \cos(\mathrm{IV}, \mathrm{VI}), \quad \cos(\mathrm{V}, \mathrm{VI}),$$

so geht diese Gleichung über in die folgende

$$(7) \quad U_1 \cos(\mathrm{I}, \mathrm{VI}) + U_2 \cos(\mathrm{II}, \mathrm{VI}) + U_3 \cos(\mathrm{III}, \mathrm{VI}) + U_4 \cos(\mathrm{IV}, \mathrm{VI}) = \cos(\mathrm{V}, \mathrm{VI}).$$

Diese Gleichung besteht für jede Ebene $\mathrm{V} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ und eine ganz beliebige Ebene VI, da diese nur senkrecht zu der beliebigen Geraden $\overline{5, 6}$ angenommen wurde; sie ist ferner erfüllt, wie auch die positive Seite der Ebene VI gewählt sein möge, da ihre beiden Seiten zugleich das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, wenn die positive Seite von VI mit der negativen vertauscht wird.

Bezeichnet man also die vier Tetraederebenen wie auf S. 235 durch $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ und die ganz willkürlich angenommenen Ebenen V und VI mit ψ und χ, so geht die Gleichung (7) über in

$$(8) \quad U_1 \cos(\varphi_1, \chi) + U_2 \cos(\varphi_2, \chi) + U_3 \cos(\varphi_3, \chi) + U_4 \cos(\varphi_4, \chi) = \cos(\psi, \chi),$$

wo U_1, U_2, U_3, U_4 die Koordinaten der Ebene ψ sind.

Aus dieser Gleichung, welche für jede Lage der Ebene χ gilt, kann die gesuchte Relation zwischen den homogenen Koordinaten (U_1, U_2, U_3, U_4) einer beliebigen Ebene ψ mit Leichtigkeit abgeleitet werden. Läßt man nämlich die beliebig zu wählende Ebene χ successive mit ψ und dann mit jeder der vier Tetraederebenen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ zusammenfallen, so erhält man die fünf Gleichungen

$$U_1 \cos(\varphi_1, \psi) + U_2 \cos(\varphi_2, \psi) + U_3 \cos(\varphi_3, \psi) + U_4 \cos(\varphi_4, \psi) = 1$$

$$\cos(\varphi_i, \psi) = U_1 \cos(\varphi_1, \varphi_i) + U_2 \cos(\varphi_2, \varphi_i) + U_3 \cos(\varphi_3, \varphi_i) + U_4 \cos(\varphi_4, \varphi_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

und wenn man die Werte der $\cos(\varphi_i, \psi)$ in die erste dieser Gleichungen einsetzt, so ergibt sich die gesuchte Relation in der folgenden Form

$$(9) \qquad \Sigma\, U_i U_k \cos(\varphi_i, \varphi_k) = 1.$$

Die linke Seite dieser identischen Relation ist eine quadratische Form der Koordinaten (U_1, U_2, U_3, U_4) einer Ebene ψ, deren Koeffizientensystem

$$\left(\cos(\varphi_i, \varphi_k)\right) = \begin{pmatrix} 1, & \cos(\varphi_1, \varphi_2), & \cos(\varphi_1, \varphi_3), & \cos(\varphi_1, \varphi_4) \\ \cos(\varphi_2, \varphi_1), & 1, & \cos(\varphi_2, \varphi_3), & \cos(\varphi_2, \varphi_4) \\ \cos(\varphi_3, \varphi_1), & \cos(\varphi_3, \varphi_2), & 1, & \cos(\varphi_3, \varphi_4) \\ \cos(\varphi_4, \varphi_1), & \cos(\varphi_4, \varphi_2), & \cos(\varphi_4, \varphi_3), & 1 \end{pmatrix}$$

aus den Kosinus der sechs Neigungswinkel der Seitenflächen des Fundamentaltetraeders besteht. Diese Relation findet sich niemals in den älteren Lehrbüchern der analytischen Geometrie.

Die für die Ebenenkoordinaten bestehende Relation (9) läſst sich noch auf eine andere Form bringen. Zu diesem Zwecke betrachten wir dieselbe für eine Ebene ψ', welche parallel zu ψ durch den Punkt 1 gelegt ist und deren Koordinaten U_1', U_2', U_3', U_4' sein mögen. Dann bestehen nach (9) auf S. 235 die drei Gleichungen

$$(U_i' - U_i)\varphi_1 = (U_1' - U_1)\varphi_i \qquad (i = 2, 3, 4),$$

und da U_1' nach der Voraussetzung gleich Null ist, so ergibt sich

$$(10) \qquad \varphi_1 U_i' = U_i\varphi_1 - U_1\varphi_i, \quad U_1' = 0 \qquad (i = 2, 3, 4).$$

Multipliziert man also die für die Koordinaten von ψ' bestehende Relation

$$1 = \Sigma\, U_i' U_k' \cos(\varphi_i, \varphi_k) \qquad (i, k = 2, 3, 4)$$

mit φ_1^2 und ersetzt die Gröſsen $\varphi_1 U_1'$, $\varphi_1 U_2'$, $\varphi_1 U_3'$, $\varphi_1 U_4'$ durch ihre in (10) gefundenen Werte, so ergibt sich

$$(10\text{a}) \qquad \varphi_1^2 = \sum_{i,k=2,3,4} (U_i\varphi_1 - U_1\varphi_i)(U_k\varphi_1 - U_1\varphi_k)\cos(\varphi_i, \varphi_k).$$

Wendet man diese Gleichung speziell an auf die erste Tetraederebene, für welche

$$U_1 = 1, \quad U_2 = U_3 = U_4 = 0$$

sind, so erhält man die Identität

$$\varphi_1^2 = \varphi_2^2 + 2\varphi_2\varphi_3\cos(\varphi_2, \varphi_3) + \varphi_3^2 + 2\varphi_2\varphi_4\cos(\varphi_2, \varphi_4)$$
$$+ 2\varphi_3\varphi_4\cos(\varphi_3, \varphi_4) + \varphi_4^2,$$

und sie gibt den Inhalt einer Tetraederfläche φ_1, dargestellt durch die drei anderen und deren Neigungswinkel gegeneinander.

Vermittelst der hier gefundenen identischen Relation zwischen den Koordinaten (U_1, U_2, U_3, U_4) kann nunmehr, wie leicht ersichtlich, die Gleichung einer Fläche in Ebenenkoordinaten

$$F(U_1, U_2, U_3, U_4) = 0$$

homogen gemacht werden. Wir wollen als Beispiel die Gleichung einer Kugelfläche angeben, deren Mittelpunkt die Koordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) hat, und deren Radius gleich R ist. Dann ist nach (3) auf S. 235 die Gleichung aller Tangentialebenen der Kugel, d. h. die Gleichung jener Kugel selbst die folgende

$$h_1 u_1 U_1 + h_2 u_2 U_2 + h_3 u_3 U_3 + h_4 u_4 U_4 = R,$$

denn ihr genügen alle und nur die Ebenen, deren senkrechte Entfernung von dem Punkte (u_1, u_2, u_3, u_4) gleich R ist. Um sie homogen zu machen, erheben wir sie ins Quadrat und ersetzen ihre rechte Seite mit Benützung von (9) durch den mit ihr übereinstimmenden Ausdruck

$$R^2\left(\Sigma\, U_i U_k \cos(\varphi_i, \varphi_k)\right)$$

und hierdurch erhalten wir die Gleichung der Kugel in der homogenen Form

$$\Sigma\left(h_i h_k u_i u_k - R^2 \cos(\varphi_i, \varphi_k)\right) U_i U_k = 0.$$

§ 3.

Um das Volumen eines Tetraeders durch die homogenen Koordinaten seiner Eckpunkte auszudrücken, schicken wir die folgenden einfachen Bemerkungen voraus. Es seien

$$5,\ 6,\ 7,\ 8 \quad \text{und} \quad \mathrm{V},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{VIII}$$

vier beliebige Punkte und vier beliebige Ebenen; dann soll der Kürze wegen die aus den 16 Abständen der vier Punkte 5, 6, 7, 8 von den vier Ebenen gebildete Determinante mit $\begin{vmatrix} \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, & \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}$ bezeichnet werden, so daſs also

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, & \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{V},5, & \mathrm{V},6, & \mathrm{V},7, & \mathrm{V},8 \\ \mathrm{VI},5, & \mathrm{VI},6, & \mathrm{VI},7, & \mathrm{VI},8 \\ \mathrm{VII},5, & \mathrm{VII},6, & \mathrm{VII},7, & \mathrm{VII},8 \\ \mathrm{VIII},5, & \mathrm{VIII},6, & \mathrm{VIII},7, & \mathrm{VIII},8 \end{vmatrix}$$

ist. Sind dann zunächst jene vier Punkte die Ecken des aus den vier Ebenen gebildeten Tetraeders, so reduziert sich die Determinante auf das Produkt ihrer Diagonalglieder, und man erhält in diesem Falle

$$(1\mathrm{a}) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, & \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix} = (\mathrm{V}, 5)(\mathrm{VI}, 6)(\mathrm{VII}, 7)(\mathrm{VIII}, 8).$$

Es seien nun wie vorher 1, 2, 3, 4 die Ecken und I, II, III, IV die gegenüberliegenden Seiten des Fundamentaltetraeders, so ist nach (1a)

$$(1\mathrm{b}) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{I}, & \mathrm{II}, & \mathrm{III}, & \mathrm{IV} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix} = (\mathrm{I}, 1)(\mathrm{II}, 2)(\mathrm{III}, 3)(\mathrm{IV}, 4).$$

Ferner seien 5, 6, 7, 8 vier beliebige Punkte und

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ u_1', & u_2', & u_3', & u_4' \\ u_1'', & u_2'', & u_3'', & u_4'' \\ u_1''', & u_2''', & u_3''', & u_4''' \end{matrix}$$

ihre homogenen Koordinaten; wir bilden nun die Determinante

$$\left|u_1^{(i)},\ u_2^{(i)},\ u_3^{(i)},\ u_4^{(i)}\right| \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

ihrer Koordinaten, wobei der Gleichmäſsigkeit wegen durch den oberen Index $i = 0$ die Koordinaten des ersten Punktes bezeichnet werden; ersetzen wir dann die Koordinaten durch ihre Ausdrücke in (3) auf S. 232 und setzen die gemeinsamen Nenner der Kolonnen in den Nenner, so ergibt sich

$$\left| u_1^{(i)},\ u_2^{(i)},\ u_3^{(i)},\ u_4^{(i)} \right| = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV} \\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \end{vmatrix}}{(\mathrm{I},1)(\mathrm{II},2)(\mathrm{III},3)(\mathrm{IV},4)},$$

oder mit Benützung von (1b)

$$\frac{\begin{vmatrix} \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV} \\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV} \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ u_1', & u_2', & u_3', & u_4' \\ u_1'', & u_2'', & u_3'', & u_4'' \\ u_1''', & u_2''', & u_3''', & u_4''' \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Bedeuten ferner V, VI, VII, VIII vier beliebige Ebenen im Raume, deren homogene Koordinaten beziehlich

$$\begin{matrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ U_1', & U_2', & U_3', & U_4' \\ U_1'', & U_2'', & U_3'', & U_4'' \\ U_1''', & U_2''', & U_3''', & U_4''' \end{matrix}$$

sind, so ergibt sich unter Benutzung von (7) auf S. 234 genau ebenso die Gleichung

$$\frac{\begin{vmatrix} \mathrm{V},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{VIII} \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV} \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ U_1', & U_2', & U_3', & U_4' \\ U_1'', & U_2'', & U_3'', & U_4'' \\ U_1''', & U_2''', & U_3''', & U_4''' \end{vmatrix}. \tag{2a}$$

Bildet man nun nach dem Multiplikationssatze das Produkt der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \mathrm{V},1, & \mathrm{V},2, & \mathrm{V},3, & \mathrm{V},4 \\ \mathrm{VI},1, & \mathrm{VI},2, & \mathrm{VI},3, & \mathrm{VI},4 \\ \mathrm{VII},1, & \mathrm{VII},2, & \mathrm{VII},3, & \mathrm{VII},4 \\ \mathrm{VIII},1, & \mathrm{VIII},2, & \mathrm{VIII},3, & \mathrm{VIII},4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1, & u_1', & u_1'', & u_1''' \\ u_2, & u_2', & u_2'', & u_2''' \\ u_3, & u_3', & u_3'', & u_3''' \\ u_4, & u_4', & u_4'', & u_4''' \end{vmatrix},$$

so wird dasselbe bei Beachtung von (3a) auf S. 236 gleich $\begin{vmatrix} \mathrm{V},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{VIII} \\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \end{vmatrix}$; also ergibt sich zunächst die Gleichung

$$\left| u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 \right| = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{V},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{VIII} \\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{V},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{VII},\ \mathrm{VIII} \\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{vmatrix}}; \tag{3}$$

wenn man jetzt die links stehende Determinante durch ihren Wert aus (2) ersetzt, so kann diese Gleichung folgendermaßen geschrieben werden

$$(3a)\quad \begin{vmatrix} I, II, III, IV \\ 5, 6, 7, 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V, VI, VII, VIII \\ 1, 2, 3, 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I, II, III, IV \\ 1, 2, 3, 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V, VI, VII, VIII \\ 5, 6, 7, 8 \end{vmatrix}$$

oder wie man auch schreiben kann

$$(3b)\quad \frac{\begin{vmatrix} I, II, III, IV \\ 5, 6, 7, 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I, II, III, IV \\ 1, 2, 3, 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} V, VI, VII, VIII \\ 5, 6, 7, 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V, VI, VII, VIII \\ 1, 2, 3, 4 \end{vmatrix}} = |u_1, u_2, u_3, u_4|.$$

Nimmt man in (3a) wiederum 5, 6, 7, 8 als die Durchschnittspunkte der Ebenen V, VI, VII, VIII an, und beachtet, daſs die analoge Voraussetzung für die Punkte 1, 2, 3, 4 und die Ebenen I, II, III, IV gilt, so erhält man den speziellen Satz:

Sind 1, 2, 3, 4 bezw. 5, 6, 7, 8 die Ecken und I, II, III, IV bezw. V, VI, VII, VIII die Seitenflächen zweier beliebigen Tetraeder im Raume, so besteht die Gleichung

$$(3c)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} I, II, III, IV \\ 5, 6, 7, 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V, VI, VII, VIII \\ 1, 2, 3, 4 \end{vmatrix} \\ = (I, 1)(II, 2)(III, 3)(IV, 4)(V, 5)(VI, 6)(VII, 7)(VIII, 8). \end{cases}$$

Es seien nun V, VI, VII speziell drei beliebige aufeinander senkrecht stehende Ebenen, welche wir als Koordinatenebenen eines rechtwinkligen Systemes auffassen wollen. Sind dann

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_8, y_8, z_8)$$

die Koordinaten der Punkte 1, 2, ... 8 in Bezug auf dieses System, so sind dieselben einfach den entsprechenden senkrechten Abständen der betreffenden Punkte von jenen drei Ebenen gleich. Läſst man ferner die Ebene VIII ins Unendliche rücken, und beachtet, daſs alsdann für zwei beliebige im Endlichen liegende Punkte, das Verhältnis ihrer Abstände von jener Ebene sich der Gröſse 1 nähert, so erkennt man, daſs der Quotient auf der rechten Seite von (3) den Wert erhält

$$\frac{|x_5, y_5, z_5, 1|}{|x_1, y_1, z_1, 1|} = \frac{(5, 6, 7, 8)}{(1, 2, 3, 4)},$$

und aus (3) ergibt sich somit die merkwürdige Gleichung

$$(4)\quad |u_1, u_2, u_3, u_4| = \frac{(5, 6, 7, 8)}{(1, 2, 3, 4)},$$

d. h. die aus den 16 homogenen Koordinaten von vier beliebigen Punkten gebildete Determinante vierter Ordnung stellt das Verhältnis der Inhaltszahl des durch jene Punkte bestimmten Tetraeders zu der des Fundamentaltetraeders dar.

Ersetzt man die Determinante $|u_1, u_2, u_3, u_4|$ durch den ersten von den Determinantenquotienten in (3b) und schreibt dann die Gleichung (4) in der Form

$$\text{(4a)} \qquad \frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}}{(5, 6, 7, 8)} = \frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix}}{(1, 2, 3, 4)},$$

so ist ihre rechte Seite von den Punkten 5, 6, 7, 8 ganz unabhängig. Schreibt man also dieselbe Relation für vier neue Punkte $5', 6', 7', 8'$, so ergibt sich unmittelbar die Gleichung

$$\frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}}{(5, 6, 7, 8)} = \frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5', & 6', & 7', & 8' \end{vmatrix}}{(5', 6', 7', 8')},$$

oder auch

$$\text{(4b)} \qquad \frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5', & 6', & 7', & 8' \end{vmatrix}} = \frac{(5, 6, 7, 8)}{(5', 6', 7', 8')}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist von der Wahl der Ebenen I, II, III, IV völlig unabhängig. Schreibt man also dieselbe Gleichung für vier andere Ebenen V, VI, VII, VIII, so ergibt sich die merkwürdige Relation

$$\text{(4c)} \qquad \frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5', & 6', & 7', & 8' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII}, & \text{VIII} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII}, & \text{VIII} \\ 5', & 6', & 7', & 8' \end{vmatrix}},$$

oder auch

$$\text{(4d)} \qquad \frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII}, & \text{VIII} \\ 5, & 6, & 7, & 8 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \text{I}, & \text{II}, & \text{III}, & \text{IV} \\ 5', & 6', & 7', & 8' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{V}, & \text{VI}, & \text{VII}, & \text{VIII} \\ 5', & 6', & 7', & 8' \end{vmatrix}}.$$

Diese Gleichungen (4c) und (4d) beweisen die folgenden sich dual entsprechenden Sätze:

I. Das Verhältnis der Abstandsdeterminanten aus vier beliebigen Ebenen (I, II, III, IV) von den Ecken zweier Tetraeder (5, 6, 7, 8) und ($5', 6', 7', 8'$) besitzt einen von der Lage jener vier Ebenen unabhängigen konstanten Wert.

II. Das Verhältnis der Abstandsdeterminanten aus vier beliebigen Punkten (5, 6, 7, 8) von den acht Flächen zweier Tetraeder (I, II, III, IV) und (V, VI, VII, VIII) besitzt einen von der Lage der vier Punkte unabhängigen konstanten Wert.

Dies sind die allgemeinsten derartigen Sätze über Tetraeder, und zugleich das erste Beispiel von wirklichen Invarianten im Raume.

Gerade in der analytischen Geometrie kann man wohl mit Recht sagen, daſs das Auffinden von Invarianten der Weg zur wahren Erkenntnis ist.

Wie in der Formel (4a) die Inhaltsdeterminante (5, 6, 7, 8) eines Tetraeders durch die Abstände seiner vier Eckpunkte von vier festen Ebenen I, II, III, IV dargestellt erscheint, so läſst sich dieselbe auch durch die Abstände seiner vier Seitenflächen von vier festen Punkten, d. h. also auch durch deren Ebenenkoordinaten einfach ausdrücken.

Sind nämlich u_1, u_2, u_3, u_4 die Koordinaten eines beliebigen Punktes 5, so kann die zweite Relation (3a) auf S. 236 unter Benützung der zwischen den Koordinaten des Punktes 5 bestehenden identischen Relation (5) auf S. 237 folgendermaſsen geschrieben werden

$$u_1(\mathrm{V}, 1 - \mathrm{V}, 5) + u_2(\mathrm{V}, 2 - \mathrm{V}, 5) + u_3(\mathrm{V}, 3 - \mathrm{V}, 5) + u_4(\mathrm{V}, 4 - \mathrm{V}, 5) = 0.$$

Fügt man zu dieser Gleichung die entsprechenden für drei andere Ebenen VI, VII, VIII hinzu, so erhält man ein System von vier homogenen linearen Gleichungen für die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 des Punktes 5, deren Determinante notwendig verschwinden muſs, da die u_i nicht zugleich den Wert Null haben können; man erhält also die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathrm{V}, 1 - \mathrm{V}, 5, & \mathrm{V}, 2 - \mathrm{V}, 5, & \mathrm{V}, 3 - \mathrm{V}, 5, & \mathrm{V}, 4 - \mathrm{V}, 5 \\ \mathrm{VI}, 1 - \mathrm{VI}, 5, & \mathrm{VI}, 2 - \mathrm{VI}, 5, & \mathrm{VI}, 3 - \mathrm{VI}, 5, & \mathrm{VI}, 4 - \mathrm{VI}, 5 \\ \mathrm{VII}, 1 - \mathrm{VII}, 5, & \mathrm{VII}, 2 - \mathrm{VII}, 5, & \mathrm{VII}, 3 - \mathrm{VII}, 5, & \mathrm{VII}, 4 - \mathrm{VII}, 5 \\ \mathrm{VIII}, 1 - \mathrm{VIII}, 5, & \mathrm{VIII}, 2 - \mathrm{VIII}, 5, & \mathrm{VIII}, 3 - \mathrm{VIII}, 5, & \mathrm{VIII}, 4 - \mathrm{VIII}, 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Es seien nun speziell V, VI, VII, VIII die Seitenflächen und 5, 6, 7, 8 beziehlich die gegenüberliegenden Ecken des zu untersuchenden Tetraeders. Dann fallen in jener Determinante die Subtrahenden der zweiten, dritten und vierten Zeile fort, weil sich der Punkt 5 auf den Ebenen VI, VII, VIII befindet. Entwickelt man also jene Determinante jetzt nach ihrer ersten Zeile, so geht die Gleichung über in die folgende

$$D = (\mathrm{V}, 5)\, D_1,$$

in welcher D die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, & \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix}$$

und D_1 diejenige Determinante bezeichnet, welche aus D entsteht, wenn man in ihr die erste Horizontalreihe

$$\mathrm{V}, 1, \quad \mathrm{V}, 2, \quad \mathrm{V}, 3, \quad \mathrm{V}, 4$$

durch die Reihe

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 1$$

ersetzt. Wenn nun D_2, D_3, D_4 analog definiert und die drei übrigen Eckpunkte des aus den Ebenen V, VI, VII, VIII gebildeten Tetraeders durch die Ziffern 6, 7, 8 bezeichnet werden, so gelten also die vier Relationen

$$(5) \qquad D = (\mathrm{V}, 5) \cdot D_1 = (\mathrm{VI}, 6) \cdot D_2 = (\mathrm{VII}, 7) \cdot D_3 = (\mathrm{VIII}, 8) \cdot D_4.$$

Vertauscht man nun in (4a) die Punkte 1, 2, 3, 4 und 5, 6, 7, 8 und zugleich die Ebenen I, II, III, IV und V, VI, VII, VIII, und ersetzt dann die Determinante $\begin{vmatrix} \mathrm{V}, & \mathrm{VI}, & \mathrm{VII}, & \mathrm{VIII} \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{vmatrix}$ durch D, so geht sie bei Beachtung der Gleichung (1a) auf S. 241 über in

$$D(5, 6, 7, 8) = (1, 2, 3, 4) \cdot (\mathrm{V}, 5) \cdot (\mathrm{VI}, 6) \cdot (\mathrm{VII}, 7) \cdot (\mathrm{VIII}, 8),$$

und aus (5) ergibt sich die gesuchte Gleichung

$$(6) \qquad (5, 6, 7, 8) = (1, 2, 3, 4) \frac{D^3}{D_1 D_2 D_3 D_4},$$

in welcher die Determinanten D, D_1, D_2, D_3, D_4 nur die 16 Abstände der Ebenen V, VI, VII, VIII von den Punkten 1, 2, 3, 4 enthalten.

Die fünf Determinanten D, D_1, D_2, D_3, D_4 lassen sich auf eine übersichtlichere Form bringen, wenn man von einer Ecke des Fundamentaltetraeders z. B. vom Punkte 4 ausgehend, die drei anliegenden Kanten desselben

$$(14) = x, \quad (24) = y, \quad (34) = z$$

und die Abstände derselben Ecke von den Ebenen V, VI, VII, VIII

$$\mathrm{V}, 4 = p_1, \quad \mathrm{VI}, 4 = p_2, \quad \mathrm{VII}, 4 = p_3, \quad \mathrm{VIII}, 4 = p_4$$

setzt. Nach S. 238 gelten nämlich alsdann die Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{V}, 1 - \mathrm{V}, 4 = x \cos(p_1, x), \quad \mathrm{V}, 2 - \mathrm{V}, 4 = y \cos(p_1, y), \\ \qquad \mathrm{V}, 3 - \mathrm{V}, 4 = z \cos(p_1, z), \end{cases}$$

sowie die analogen Gleichungen für die Ebenen VI, VII, VIII. Subtrahiert man also in den fünf Determinanten $D, D_1, \ldots D_4$ jedesmal die letzte Kolonne von den drei ersten und ersetzt die dann sich ergebenden Abstandsdifferenzen durch ihre Ausdrücke in (7), so ergibt sich

$$(8) \qquad \frac{D}{x\,y\,z} = \begin{vmatrix} \cos(p_1, x), & \cos(p_1, y), & \cos(p_1, z), & p_1 \\ \cos(p_2, x), & \cos(p_2, y), & \cos(p_2, z), & p_2 \\ \cos(p_3, x), & \cos(p_3, y), & \cos(p_3, z), & p_3 \\ \cos(p_4, x), & \cos(p_4, y), & \cos(p_4, z), & p_4 \end{vmatrix} = R$$

und

$$(8\mathrm{a}) \qquad \frac{D_k}{x\,y\,z} = \frac{\partial R}{\partial p_k} = R_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Hiernach nimmt unsere Gleichung (6) die Form an

$$(9) \qquad (5, 6, 7, 8) = \frac{(1, 2, 3, 4)}{(14)(24)(34)} \cdot \frac{R^2}{R_1 R_2 R_3 R_4}.$$

Hierbei ist zu bemerken, daſs die Determinantenausdrücke R_i eine einfache geometrische Bedeutung haben. Nach S. 225 ist z. B.

$$R_1 = \begin{vmatrix} \cos(p_2, x), & \cos(p_2, y), & \cos(p_2, z) \\ \cos(p_3, x), & \cos(p_3, y), & \cos(p_3, z) \\ \cos(p_4, x), & \cos(p_4, y), & \cos(p_4, z) \end{vmatrix} = \sin(x, y, z) \cdot \sin(p_2, p_3, p_4),$$

wo (x, y, z) die Ecke 4 ist und (p_2, p_3, p_4) die durch die Lote (p_2, p_3, p_4) gebildete Ecke bedeutet. Da die drei letzten Linien aber auf den Flächen VI, VII, VIII der Ecke 5 senkrecht stehen, so ist

$$\sin(p_2, p_3, p_4) = \sin 5',$$

wo $5'$ die zu 5 polare Ecke bedeutet. Da nun analoge Ausdrücke für die übrigen drei Determinanten bestehen, so ergibt sich

$$R_1 = \sin(x, y, z)\sin(5'), \; R_2 = \sin(x, y, z)\sin(6'), \ldots R_4 = \sin(x, y, z)\sin(8'),$$

und durch die Entwickelung von R nach der letzten Vertikalreihe erhält man

$$R = \sin(x, y, z)(p_1 \sin 5' + p_2 \sin 6' + p_3 \sin 7' + p_4 \sin 8').$$

Beachtet man ferner, daſs nach (3a) auf S. 223

$$\frac{(1, 2, 3, 4)}{(14)(24)(34)} = \sin(x, y, z)$$

ist, so geht die gefundene Gleichung (9) über in

$$(10) \qquad \begin{cases} (5, 6, 7, 8) \sin(5') \sin(6') \sin(7') \sin(8') \\ = \big(p_1 \sin(5') + p_2 \sin(6') + p_3 \sin(7') + p_4 \sin(8')\big)^2. \end{cases}$$

In dieser Gestalt kann jene Gleichung unmittelbar verifiziert werden, wenn man beachtet, daſs infolge der Gleichung $6V = (5, 6, 7, 8)$ und nach S. 227 (9)

$$\sin 5' = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{(5, 6, 7, 8)^2}{\varphi_6 \varphi_7 \varphi_8}$$

ist, wenn mit $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ wieder die Seitenflächen das Tetraeders 5, 6, 7, 8 bezeichnet werden, und daſs analoge Gleichungen für die anderen Eckensinus bestehen. Führt man diese Ausdrücke ein und beachtet, daſs infolge der Gleichung $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$

$$p_1 \varphi_5 + p_2 \varphi_6 + p_3 \varphi_7 + p_4 \varphi_8 = \frac{1}{2} \cdot (5, 6, 7, 8)$$

ist, so geht (10) in eine reine Identität über.

Fünfzehnte Vorlesung.

Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in ihre irreduktiblen Faktoren. — Die natürlichen Rationalitätsbereiche $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$. — Die ganzen rationalen Funktionen. — Aufsuchung aller Teiler einer ganzen Grösse des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$. — Die Primteiler des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$. — Jede ganze Grösse des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ kann auf eine einzige Weise in Primfaktoren zerlegt werden. — Teilerfremde Funktionen des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$.

§ 1.

Bei der speziellen Betrachtung von drei linearen Gleichungen

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

mit unbestimmten Koeffizienten (a_i, b_i, c_i, d_i) in der achten Vorlesung hatten wir die Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass ihre Lösungen rationale ganzzahlige Funktionen der zwölf Gleichungskoeffizienten sind, dass also jede der drei Unbekannten ein Bruch von der Form

$$(1) \qquad \frac{\Phi(a_i, b_i, c_i, d_i)}{\Theta(a_i, b_i, c_i, d_i)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sei, dessen Zähler und Nenner ganze Funktionen der zwölf Grössen (a_i, b_i, c_i, d_i) mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Wir hatten dann aber diese Brüche in ihrer reduzierten Form angenommen, d. h. vorausgesetzt, dass etwa auftretende gemeinsame Faktoren ihrer Zähler und Nenner durch einfaches Heben bereits beseitigt sind, dass also die beiden Funktionen Φ und Θ in (1) weder Zahlen noch auch ganze Funktionen von (a_i, b_i, c_i, d_i) als gemeinsame Teiler enthalten. Dieser Voraussetzung liegt die bis jetzt noch unbewiesene Annahme zu Grunde, dass es möglich ist, den grössten gemeinsamen Teiler jenes Zählers und Nenners aufzufinden, um ihn dann ebenso wie bei Zahlenbrüchen durch Heben zu beseitigen.

Da nun auch die allgemeine Theorie der linearen Gleichungen und der Determinanten n^{ter} Ordnung, zu der wir jetzt übergehen, im wesentlichen auf der arithmetischen Behandlung ganzer ganzzahliger Funktionen von beliebig vielen Unbestimmten beruht, so will ich

diesem Hauptteile eine kurze Untersuchung jener Funktionen vorausschicken, obwohl sie eigentlich schon in der allgemeinen Arithmetik durchgeführt werden sollte. Ich werde nur zeigen, daſs man die ganzen ganzzahligen Funktionen beliebig vieler Unbestimmten genau ebenso behandeln kann, wie die ganzen Zahlen in der elementaren Zahlentheorie, daſs insbesondere jede solche Funktion auf eine und auch nur auf eine Weise in ein Produkt von Primfunktionen zerlegt werden kann, welche ihrerseits auſser der Einheit gar keinen Teiler mehr enthalten.

Diese Eigenschaft ist in dem einfachsten Falle der ganzen Zahlen aus dem Grunde leicht zu beweisen, weil man alle Divisoren einer vorgelegten Zahl n durch eine endliche Anzahl von Versuchen stets bestimmen kann. Da nämlich jeder Teiler d von n kleiner als die Zahl n sein muſs, so braucht man nur je zwei unterhalb n liegende Zahlen miteinander zu multiplizieren und diejenigen unter diesen Produkten aufzusuchen, welche gleich n sind. Ist keines dieser Produkte gleich n, so ist n unzerlegbar oder eine Primzahl, und hieraus ergibt sich leicht der Fundamentalsatz, daſs jede Zahl auf eine einzige Weise in das Produkt von Primzahlen zerlegt werden kann*).

Dieses Verfahren läſst sich aber schon auf die ganzen ganzzahligen rationalen Funktionen

$$F(\mathfrak{R}) = a_0 + a_1\mathfrak{R} + a_2\mathfrak{R}^2 + \cdots + a_n\mathfrak{R}^n \tag{2}$$

von nur einer Variablen $\mathfrak{R}$ nicht ohne weiteres übertragen, weil in diesem Gebiete der Begriff des Gröſserseins verloren geht; das einzige, was wir von vornherein wissen, ist, daſs der Grad eines Teilers $D(\mathfrak{R})$ von $F(\mathfrak{R})$ niedriger sein muſs, als der Grad jener ganzen Funktion selbst. Da aber die Koeffizienten jener Teiler nur ganze Zahlen zu sein brauchen, sonst aber a priori beliebig groſs sein können, so erscheint die Anzahl derjenigen ganzen Funktionen $D(\mathfrak{R})$, welche als Teiler von $F(\mathfrak{R})$ in Betracht kommen können, zunächst unendlich groſs. Allerdings müssen auch die Koeffizienten der Teiler bestimmten Bedingungen genügen; soll nämlich $F(\mathfrak{R})$ das Produkt zweier ganzen ganzzahligen Funktionen niederen Grades von $\mathfrak{R}$ sein, so setzen wir diese zunächst mit unbestimmten Koeffizienten an, und erhalten so eine Anzahl von ganzzahligen Gleichungen zur Bestimmung derselben, deren ganzzahlige Lösungen eben die gesuchten Teiler liefern. Um aber diese Methode auch in dem Falle mehrerer Variablen durchzuführen, bedarf man der Eliminationstheorie und der Theorie der

*) Vergl. *L. Kronecker*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Band I, fünfte Vorlesung.

algebraischen Gleichungen, da es schliesslich immer darauf ankommt, zu entscheiden, ob gewisse Gleichungen mit mehreren Unbekannten in ganzen Zahlen lösbar sind, oder nicht.

Der Grund davon, daſs das soeben angegebene Verfahren äuſserst schwierig und umständlich ist, liegt einfach darin, daſs die in (2) zu Grunde gelegte Entwickelung der Funktion $F(\mathfrak{R})$ nach den Potenzen $1, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}^2, \ldots \mathfrak{R}^n$ für unseren Zweck wenig geeignet ist; dagegen wird die Bestimmung der Primteiler der ganzen ganzzahligen Funktionen, wie gleich gezeigt werden soll, auſserordentlich einfach, wenn wir jene Funktionen in einer anderen geeignet gewählten Weise darstellen.

Wir wollen diese Untersuchung gleich allgemein für ganze ganzzahlige Funktionen beliebig vieler Unbestimmten $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ führen und schicken zu diesem Zwecke einige Definitionen voraus, welche für das Folgende von Wichtigkeit sind.

§ 2.

Es seien $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)}$ $(n+1)$ unbestimmte veränderliche Gröſsen; betrachten wir dann alle diejenigen Funktionen, welche aus ihnen durch Zusammensetzung vermittelst der elementaren Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division entstehen, so erhalten wir einen in sich abgeschlossenen Bereich, welcher alle rationalen Funktionen dieser Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten umfaſst, und dessen Elemente sich durch die elementaren Rechnungsoperationen wieder erzeugen; es soll dieser als der durch die Gröſsen $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ konstituierte Rationalitätsbereich, oder kürzer als der Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ bezeichnet werden. Hierin ist auch der Fall mit inbegriffen, wo die Variablen $\mathfrak{R}$ überhaupt fehlen, d. h. der Fall, in welchem der Rationalitätsbereich derjenige der rationalen Zahlen ist; dieser soll der „absolute“ Rationalitätsbereich genannt und durch (1) bezeichnet werden.

Betrachten wir spezieller diejenigen Elemente des Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$, welche aus diesen Gröſsen nur durch die drei elementaren Rechenoperationen der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation hervorgehen, so erhalten wir einen Teilbereich dieses Rationalitätsbereiches, welcher aus allen und nur den ganzen ganzzahligen Funktionen jener Gröſsen besteht. Er soll der durch $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ konstituierte Integritätsbereich genannt, und durch $[\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)}]$ bezeichnet werden. In dem einfachsten Falle, wo die Variablen $\mathfrak{R}$ fehlen, umfaſst der zugehörige Integritätsbereich [1] offenbar alle und nur die positiven und negativen ganzen Zahlen und die Null.

Ebenso nun wie in diesem einfachsten Falle alle rationalen Zahlen als Quotienten ganzer Zahlen dargestellt werden können, erhält man für jede Gröſse des Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ die folgende Darstellung

$$\frac{\Phi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})}{\Theta(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})},$$

wo Zähler und Nenner ganze ganzzahlige Funktionen von $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$, d. h. ganze Gröſsen des Rationalitätsbereiches sind. Man braucht daher nur die ganzen Gröſsen dieses Rationalitätsbereiches weiter zu untersuchen.

Mit der Fixierung des Rationalitätsbereiches wird die Frage nach der Zerlegbarkeit der ganzen Funktionen $\Phi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ desselben zu einer völlig bestimmten, insofern dabei verlangt wird, daſs auch die Faktoren von Φ ebendemselben Bereiche angehören sollen. In diesem Sinne soll nun stets eine ganze Gröſse unseres Bereiches schlechthin als irreduktibel, unzerlegbar oder als Primfunktion bezeichnet werden, wenn sie keine ebensolche ganze Funktion desselben Bereiches, d. h. weder eine ganze Zahl, noch eine ganze ganzzahlige Funktion unseres Bereiches als Faktor enthält.

In dem einfachsten Bereiche [1] der gewöhnlichen ganzen Zahlen besteht nun der Fundamentalsatz, daſs jede ganze Zahl m auf eine einzige Weise als ein Produkt von gleichen oder verschiedenen Primfaktoren dargestellt werden kann, d. h. daſs stets eine Gleichung

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_\lambda^{k_\lambda}$$

besteht, wo $p_1, p_2, \ldots p_\lambda$ nicht weiter zerlegbare oder Primzahlen bedeuten, welche man, wie bereits erwähnt, durch eine endliche Anzahl von Versuchen bestimmen kann.

Wörtlich derselbe Satz besteht nun auch für die ganzen rationalen Funktionen von beliebig vielen Variablen. Wir wollen den Beweis für diese wichtige Tatsache, welche die Grundlage für die ganze Theorie der rationalen Funktionen mehrerer Variablen und speziell für die Determinantentheorie bildet, induktiv in der Weise führen, daſs sie als wahr und bekannt für alle ganzen ganzzahligen Funktionen eines Bereiches $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n)}]$ von nur n Variablen angenommen wird; und wir wollen dann beweisen, daſs dasselbe für den Bereich $[\mathfrak{R}; \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n)}]$ gilt, welches noch eine Variable $\mathfrak{R}$ mehr enthält. Da unser Satz nämlich für den Bereich [1] der ganzen rationalen Zahlen gilt, so folgt hiernach seine Richtigkeit auch für Funktionen von einer, zwei, ... Veränderlichen, d. h. er ist auch in dem allgemeinsten Falle bewiesen.

§ 3.

Es seien also $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n)}$ n Variable und $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n)}]$ oder kürzer geschrieben $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ der durch sie konstituierte Integritätsbereich. Es sei dann M irgend eine Gröfse desselben, d. h. eine beliebige ganze ganzzahlige Funktion dieser n Variablen, so wollen wir annehmen, dafs wir bereits den folgenden Satz bewiesen haben:

> Jede Gröfse M des Integritätsbereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ kann auf eine und nur auf eine Weise in der Form
>
> $$M = \pm P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_\lambda^{k_\lambda}$$
>
> dargestellt werden, wo $P_1, P_2, \dots P_\lambda$ voneinander verschiedene unzerlegbare oder Primfunktionen desselben Bereiches bedeuten; und zwar gibt es ein endliches Verfahren, um die Primfaktoren einer beliebigen Funktion M zu bestimmen.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich aus diesem Satze:

> Jede Gröfse M des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ besitzt nur eine endliche Anzahl von Divisoren
>
> $$D^{(1)}, D^{(2)}, \dots D^{(\lambda)};$$
>
> sie werden aus der obigen Dekomposition von M in Primfaktoren unmittelbar durch alle möglichen Zusammenfassungen der Primfaktoren von M erhalten.

Wir betrachten jetzt die ganzen Gröfsen des gröfseren Bereiches

$$[\mathfrak{R}; \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n)}]$$

oder kürzer geschrieben, des Bereiches $[\mathfrak{R}; \mathfrak{R}^{(i)}]$ und denken sie uns stets in der Form geschrieben

$$F(\mathfrak{R}) = A_0 \mathfrak{R}^m + A_1 \mathfrak{R}^{m-1} + \dots + A_m,$$

wo die Koeffizienten $A_0, A_1, \dots A_m$ ganze Gröfsen des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ bedeuten. Die Zahl m, der Grad von $F(\mathfrak{R})$ in Bezug auf $\mathfrak{R}$ soll kurz als der **Grad von** $F(\mathfrak{R})$ bezeichnet werden.

Wir können und wollen zunächst voraussetzen, dafs die Koeffizienten $A_0, A_1, \dots A_m$ keinen allen gemeinsamen Primteiler P des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ besitzen; denn hätten sie einen solchen, so könnten wir ihn nach der oben gemachten Voraussetzung bestimmen und ihn dann durch einfache Division entfernen.

Angenommen nun, es sei $F(\mathfrak{R})$ das Produkt zweier ganzen ganzzahligen Funktionen

$$F(\mathfrak{R}) = \Phi(\mathfrak{R})\,\Psi(\mathfrak{R}) \tag{1}$$

und diese seien von den Graden μ und ν, so müssen die letzteren Zahlen sicher beide von Null verschieden sein, weil $F(\mathfrak{R})$ nach der Voraussetzung keinen Primteiler des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ besitzt, der ja dann in allen Koeffizienten $A_0, A_1, \dots A_m$ enthalten sein müſste. Da aber ferner die Summe $\mu + \nu = m$ ist, so muſs eine dieser beiden Gradzahlen, etwa μ, notwendig kleiner oder gleich $\frac{m}{2}$ sein. Ist also die Funktion $F(\mathfrak{R})$ überhaupt zerlegbar, so hat sie unbedingt einen Teiler $\Phi(\mathfrak{R})$, dessen Grad höchstens gleich $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m-1}{2}$ ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Den Komplementärteiler $\Psi(\mathfrak{R})$ von $\Phi(\mathfrak{R})$ findet man weiter durch einfache Division von $F(\mathfrak{R})$ durch $\Phi(\mathfrak{R})$; die Untersuchung braucht sich demnach nur auf alle diejenigen Faktoren $\Phi(\mathfrak{R})$ von $F(\mathfrak{R})$ zu erstrecken, deren Grad die oben genannte Grenze nicht übersteigt.

Wir haben so nachgewiesen, daſs der Grad der unbekannten Teiler $\Phi(\mathfrak{R})$ nur eine endliche Reihe von Werten durchlaufen kann; von den Koeffizienten jener Funktionen wissen wir nur, daſs sie irgendwelche Gröſsen des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ sind; die Lösung unseres Problemes ist somit noch keineswegs auf eine begrenzte Anzahl von Versuchen zurückgeführt.

Hierzu gelangen wir erst durch die folgende naheliegende Überlegung. Ersetzt man in (1) die Variable $\mathfrak{R}$ durch eine beliebige ganze Zahl r, so ist wegen der Gleichung

$$F(r) = \Phi(r)\,\Psi(r)$$

$\Phi(r)$ eine ganze Gröſse des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$, welche einer der Teiler der Gröſse $F(r)$ desselben Bereiches ist. Da aber $F(r)$ nach dem oben angegebenen Korollare nur eine endliche Anzahl von Divisoren besitzt, so ist $\Phi(r)$ auf eine bestimmte endliche Anzahl von Werten beschränkt. Hierauf beruht nun ein theoretisch sehr einfaches Verfahren, um zu entscheiden, ob eine Funktion $F(\mathfrak{R})$ einen Teiler von gegebenem Grade μ enthält, und um diese Divisoren, falls sie existieren, sämtlich anzugeben.

Es seien nämlich

$$r_0, r_1, \dots r_\mu$$

irgend welche $\mu + 1$ voneinander verschiedene ganze Zahlen und

$$F(r_0),\; F(r_1), \dots F(r_\mu)$$

die Werte, welche $F(\mathfrak{R})$ für jene $(\mu + 1)$ Werte von $\mathfrak{R}$ annimmt. Dieselben sind sämtlich ganze Gröſsen des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$, können

also nach der Voraussetzung in ihre Primfaktoren zerlegt werden, und man kann daher auch für jede dieser Gröfsen $F(r_k)$ alle ihre voneinander verschiedenen Teiler vollständig hinschreiben. Es seien nun

$$\begin{matrix} D_0^{(1)}, & D_0^{(2)}, & \dots & D_0^{(\lambda_0)} \\ D_1^{(1)}, & D_1^{(2)}, & \dots & D_1^{(\lambda_1)} \\ \vdots & & & \\ D_\mu^{(1)}, & D_\mu^{(2)}, & \dots & D_\mu^{(\lambda_\mu)} \end{matrix}$$

die einzelnen Divisoren bezw. von $F(r_0), F(r_1), \dots F(r_\mu)$, so mufs, soll $\Phi(\mathfrak{R})$ ein Teiler von $F(\mathfrak{R})$ sein, $\Phi(r_k)$ gleich einer der ganzen Gröfsen $D_k^{(1)}, \dots D_k^{(\lambda_k)}$ sein; $\Phi(r_k)$ kann also überhaupt nur einen unter diesen λ_k völlig bestimmten Werten haben. Kennt man nun die Werte $\Phi(r_k)$, die eine ganze Funktion μ^{ten} Grades $\Phi(\mathfrak{R})$ für irgend welche $\mu + 1$ Werte ihres Argumentes annimmt, so kann man aus ihnen bekanntlich $\Phi(\mathfrak{R})$ selbst berechnen; jene Funktion ist nämlich nach der *Lagrange*schen Interpolationsformel unmittelbar durch die Gleichung gegeben

$$\Phi(\mathfrak{R}) = \sum_{k=0}^{\mu} \Phi(r_k) \cdot \frac{(\mathfrak{R} - r_0) \dots (\mathfrak{R} - r_{k-1})(\mathfrak{R} - r_{k+1}) \dots (\mathfrak{R} - r_\mu)}{(r_k - r_0) \dots (r_k - r_{k-1})(r_k - r_{k+1}) \dots (r_k - r_\mu)}.$$

Man bekommt also den Komplex aller Funktionen $\Phi(\mathfrak{R})$, welche möglicherweise in $F(\mathfrak{R})$ enthalten sein können, dadurch, dafs man in der obigen Darstellung jede der Gröfsen $\Phi(r_k)$ unabhängig von den anderen die Reihe $D_k^{(1)}, \dots D_k^{(\lambda_k)}$ durchlaufen läfst und zugleich den Grad μ gleich $\frac{m}{2}$ bezw. $\frac{m-1}{2}$ annimmt.

Unter diesen $\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_\mu$ Funktionen sind zunächst alle diejenigen einfach fortzulassen, deren Koeffizienten nicht sämtlich ganze Zahlen sind, da ja alle Teiler von $F(\mathfrak{R})$ ganze ganzzahlige Funktionen der $n + 1$ Variablen $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)})$ sein sollen. Von den dann noch übrigen Funktionen $\Phi(\mathfrak{R})$ überzeugt man sich dann durch wirkliche Ausführung der Division, welche unter ihnen die gesuchten Teiler von $F(\mathfrak{R})$ sind; und damit ist erwiesen, dafs die Bestimmung aller Divisoren von $F(\mathfrak{R})$ in der Tat nur eine endliche Anzahl von Operationen erfordert.

Es seien nun auf diesem Wege die sämtlichen Teiler von $F(\mathfrak{R})$ bestimmt, und es sei $T_1(\mathfrak{R})$ derjenige Divisor, oder falls es mehrere geben sollte, einer von den Teilern, deren Grad in Bezug auf $\mathfrak{R}$ möglichst klein ist. Ist dann

$$T_1(\mathfrak{R}) = C_0 \mathfrak{R}^\mu + C_1 \mathfrak{R}^{\mu-1} + \dots + C_\mu,$$

so ist jene Funktion $T_1(\mathfrak{R})$ selbst eine **unzerlegbare oder Primfunktion** des Bereiches $[\mathfrak{R}; \mathfrak{R}^{(i)}]$ in dem Sinne, daſs sie keine von 1 oder von $T_1(\mathfrak{R})$ verschiedene ganze ganzzahlige Funktion von $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ mehr enthalten kann; denn wäre das der Fall, so müſste ja dieser Teiler von niedrigerem Grade in $\mathfrak{R}$ sein, und er wäre auſserdem offenbar auch in $F(\mathfrak{R})$ enthalten, was mit der soeben über $T_1(\mathfrak{R})$ gemachten Voraussetzung im Widerspruche steht.

Ist nun $T_1(\mathfrak{R})$ eine solche Primfunktion und

$$F(\mathfrak{R}) = T_1(\mathfrak{R}) F_1(\mathfrak{R}),$$

so kann man nunmehr in derselben Weise einen Primteiler niedrigsten Grades $T_2(\mathfrak{R})$ von $F_1(\mathfrak{R})$ bestimmen, so daſs $F_1(\mathfrak{R}) = T_2(\mathfrak{R}) F_2(\mathfrak{R})$, also

$$F(\mathfrak{R}) = T_1(\mathfrak{R}) T_2(\mathfrak{R}) F_2(\mathfrak{R})$$

ist. Da somit $T_2(\mathfrak{R})$ auch ein Primteiler von $F(\mathfrak{R})$ ist, so folgt zunächst, daſs $T_2(\mathfrak{R})$ notwendig von gleichem oder höherem Grade als $T_1(\mathfrak{R})$ ist. Wir wenden nunmehr unsere Methode auf $F_2(\mathfrak{R})$ an und setzen dieses Verfahren so weit fort, bis einmal die übrigbleibende Funktion $F_\varrho(\mathfrak{R})$ selbst unzerlegbar ist. Dieser Fall muſs zuletzt eintreten, weil der Grad der ganzen Funktionen $F(\mathfrak{R}), F_1(\mathfrak{R}), \ldots$ beständig abnimmt und offenbar nicht kleiner werden kann, als der des ersten Faktors $T_1(\mathfrak{R})$.

Faſst man endlich noch die gleichen Elemente $T(\mathfrak{R})$ zu Potenzen zusammen, so gelangt man auf diesem Wege zu einer Darstellung der ursprünglichen Funktion $F(\mathfrak{R})$ durch ein Produkt

$$F(\mathfrak{R}) = T_1(\mathfrak{R})^{h_1} T_2(\mathfrak{R})^{h_2} \ldots T_l(\mathfrak{R})^{h_l},$$

womit die Zerlegbarkeit einer jeden Funktion $F(\mathfrak{R})$ in Primfaktoren bewiesen und zugleich ein endliches Verfahren zur Aufsuchung jener Faktoren gefunden ist.

Sollte die Funktion $F(\mathfrak{R})$ in (1) entgegen der oben gemachten Annahme noch einen von $\mathfrak{R}$ unabhängigen Teiler M besitzen, der dann in allen Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_m$ als gemeinsamer Faktor enthalten wäre, so kann man diesen nach der Voraussetzung finden und ihn für sich in Primteiler zerlegen. Man erhält so eine in jedem Falle gültige Zerlegung von $F(\mathfrak{R})$ in Primfaktoren

$$F(\mathfrak{R}) = P_1^{\varrho_1} P_2^{\varrho_2} \ldots P_k^{\varrho_k} T_1(\mathfrak{R})^{h_1} T_2(\mathfrak{R})^{h_2} \ldots T_l(\mathfrak{R})^{h_l},$$

in welcher $P_1, P_2, \ldots P_k$ Primteiler des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$,

$$T_1(\mathfrak{R}), T_2(\mathfrak{R}), \ldots T_l(\mathfrak{R})$$

Primteiler des Bereiches $[\mathfrak{R}; \mathfrak{R}^{(i)}]$ bedeuten, welche auch die Variable $\mathfrak{R}$ enthalten.

§ 4.

Für die ganzen Grössen eines beliebigen Rationalitätsbereiches behält nun auch der Fundamentalsatz Geltung, dass sie nur auf eine Weise in Primfunktionen zerlegt werden können. Wie bei dem Bereiche der ganzen Zahlen fliesst auch hier diese Eigenschaft aus dem grundlegenden Satze:

> Ist das Produkt zweier ganzen Grössen $\Phi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ und $\Psi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ durch eine Primfunktion teilbar, so muss mindestens einer der beiden Faktoren dieselbe enthalten.

Oder was dasselbe ist:

> Ist das Produkt $\Phi\Psi$ durch einen Primfaktor teilbar, und der Faktor Φ enthält denselben nicht, so ist dieser Primfaktor notwendig in Ψ enthalten.

Auch hier nehmen wir an, dass dieser Satz für den Rationalitätsbereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ von nur n Variablen bewiesen sei, und dass der aus diesem Satze unmittelbar folgende Beweis für die Eindeutigkeit der Zerlegung aller Grössen des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ in Primfaktoren ebenfalls bereits erbracht sei. Dann zeigen wir jetzt, dass jener Satz auch für den grösseren Bereich $(\mathfrak{R}; \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ gilt. Dabei sondert sich dieser Beweis in zwei Teile, je nachdem der Primfaktor dem Bereiche $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ oder erst dem grösseren Bereiche $[\mathfrak{R}; \mathfrak{R}^{(i)}]$ angehört.

1. Es gehöre die Primfunktion $P(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ zuerst dem Bereiche $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ von nur n Variablen an, während $\Phi(\mathfrak{R})$ und $\Psi(\mathfrak{R})$ ganze Funktionen des grösseren Bereiches $[\mathfrak{R}; \mathfrak{R}^{(i)}]$ sind.

Es sei also

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \mathfrak{R} + \Phi_2 \mathfrak{R}^2 + \cdots, \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \mathfrak{R} + \Psi_2 \mathfrak{R}^2 + \cdots,$$

wo die Koeffizienten Φ_h und Ψ_h ganze Grössen des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(i)}]$ sind; dann muss gemäss der Voraussetzung, dass Φ nicht durch P teilbar ist, wenigstens eine der Grössen $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ diesen Primfaktor nicht enthalten. Ist nun in der Reihe $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ der Koeffizient Φ_h der erste, welcher P nicht enthält, so ist, modulo P_0 betrachtet,

$$\Phi(\mathfrak{R}) \equiv \Phi_h \mathfrak{R}^h + \Phi_{h+1} \mathfrak{R}^{h+1} + \cdots \pmod{P}.$$

Nun sei anderseits von den Koeffizienten von Ψ der erste, von dem nicht bekannt ist, dass er P enthält, der Koeffizient Ψ_k; dann ist auch

$$\Psi \equiv \Psi_k \mathfrak{R}^k + \Psi_{k+1} \mathfrak{R}^{k+1} + \cdots \pmod{P}.$$

Dann ist, gemäfs der Voraussetzung, dafs $\Phi\,\Psi$ durch P teilbar ist, das gleiche für das ihm kongruente Produkt

$$(\Phi_h \mathfrak{R}^h + \Phi_{h+1} \mathfrak{R}^{h+1} + \cdots)(\Psi_k \mathfrak{R}^k + \Psi_{k+1} \mathfrak{R}^{k+1} + \cdots) = \Phi_h \Psi_k \mathfrak{R}^{h+k} + \\ + (\Phi_h \Psi_{k+1} + \Psi_k \Phi_{h+1}) \mathfrak{R}^{h+k+1} + \cdots$$

der Fall; es ist also das Produkt $\Phi_h \Psi_k$ ebenfalls durch jenen Primfaktor divisibel. Da nun nach der Voraussetzung Φ_h den Divisor P nicht enthält, so mufs der andere Faktor Ψ_k durch P teilbar sein, da der zu beweisende Satz für die dem Bereiche $(\mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ angehörigen Gröfsen P, Φ_h, Ψ_k als gültig angenommen ist. Es müssen daher alle Koeffizienten Ψ_0, $\Psi_1, \ldots$ den Faktor P enthalten, d. h. die Gröfse $\Psi(\mathfrak{R})$ ist selbst durch diesen Primfaktor teilbar, was zu beweisen war.

Ehe wir den zweiten Teil unseres Satzes beweisen, ziehen wir aus dem soeben gefundenen Theoreme einige Folgerungen. Es sei $T(\mathfrak{R})$ ein irreduktibler Divisor des Bereiches $[\mathfrak{R};\, \mathfrak{R}^{\iota}]$ von $n+1$ Unbestimmten, d. h. eine solche Gröfse, welche nicht in das Produkt zweier ganzen Funktionen dieses Bereiches zerlegt werden kann. Dann folgt zunächst aus dem soeben gegebenen Beweise, dafs $T(\mathfrak{R})$ auch nicht gleich dem Produkte ganzer Funktionen von $\mathfrak{R}$ sein kann, deren Koeffizienten etwa rationale gebrochene Funktionen des Bereiches $[\mathfrak{R}^{(\iota)}]$ wären. In diesem Falle hätten wir nämlich für $T(\mathfrak{R})$ eine Darstellung von der Form

$$T(\mathfrak{R}) = \frac{\Theta(\mathfrak{R}\ldots)\, X(\mathfrak{R}\ldots)}{N(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)},$$

wo $\Theta(\mathfrak{R})$ und $X(\mathfrak{R})$ ganze Gröfsen des Bereiches $[\mathfrak{R};\, \mathfrak{R}^{(\iota)}]$ bedeuten, während der Nenner N von $\mathfrak{R}$ unabhängig ist, und wo überdies alle gemeinsamen Primfaktoren von N mit Θ oder mit X bereits durch Heben beseitigt sind, so dafs N weder mit $\Theta(\mathfrak{R})$ noch auch mit $X(\mathfrak{R})$ einen gemeinsamen Primfaktor besitzt. Enthielte dann N überhaupt noch einen Primfaktor, so müfste dieser in dem Produkte $\Theta(\mathfrak{R})\, X(\mathfrak{R})$, also nach dem soeben bewiesenen Satze in mindestens einer jener Gröfsen selbst enthalten sein; und da alle diese Faktoren bereits durch Heben beseitigt sind, so ist zu erschliefsen, dafs $N = 1$, also da $T(\mathfrak{R})$ im Bereiche $[\mathfrak{R};\, \mathfrak{R}^{(\iota)}]$ unzerlegbar ist, dafs $\Theta(\mathfrak{R}) = 1$, $X(\mathfrak{R}) = T(\mathfrak{R})$ sein mufs, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Es sei nun ferner $\Phi(\mathfrak{R})$ eine Gröfse des Bereiches $[\mathfrak{R};\, \mathfrak{R}^{(\iota)}]$, welche nicht durch den Primfaktor $T(\mathfrak{R})$ desselben Bereiches teilbar ist, so dafs also der Quotient $\frac{\Phi(\mathfrak{R})}{T(\mathfrak{R})}$ eine gebrochene Funktion der $(n+1)$ Variablen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)}$ ist. Dann zeigt man ebenso, dafs $\Phi(\mathfrak{R})$

auch nicht etwa als Funktion von $\mathfrak{R}$ allein betrachtet durch $T(\mathfrak{R})$ teilbar sein kann, d. h. daſs jener Quotient nicht gleich einer ganzen Funktion von $\mathfrak{R}$ sein kann, deren Koeffizienten aber gebrochene Funktionen der übrigen Variablen $(\mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ sind. Wäre nämlich $\frac{\Phi(\mathfrak{R})}{T(\mathfrak{R})}$ in $\mathfrak{R}$ ganz, so bestände eine Gleichung von der Form

$$\frac{\Phi(\mathfrak{R})}{T(\mathfrak{R})} = \frac{\Theta(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})}{N(\mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})},$$

wo der Nenner N wieder von $\mathfrak{R}$ unabhängig ist, und wo überdies vorausgesetzt werden kann, daſs alle gemeinsamen Primfaktoren von Θ und N bereits durch Heben beseitigt sind, daſs also auf der rechten Seite Θ und N keinen gemeinsamen Primfaktor mehr besitzen. Enthielte dann N überhaupt noch irgend einen Primfaktor P, so würde sich aus der Gleichung

$$N\Phi(\mathfrak{R}) = T(\mathfrak{R})\,\Theta(\mathfrak{R})$$

ergeben, daſs dieser Primfaktor von N in dem Produkte $T \cdot \Theta$, also auch in mindestens einem seiner Faktoren enthalten ist; und da $T(\mathfrak{R})$ irreduktibel ist, und N und Θ keinen gemeinsamen Primfaktor auſser Eins haben, so muſs jeder Primfaktor von N, also auch N selbst gleich Eins sein.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen beweisen wir den zweiten Teil unseres Satzes, den wir jetzt folgendermaſsen aussprechen:

2. Ist ein Produkt $\Phi(\mathfrak{R}) \cdot \Psi(\mathfrak{R})$ zweier ganzen Funktionen durch einen Primteiler $T(\mathfrak{R})$ teilbar, und der erste Faktor des Produktes enthält diesen Divisor nicht, so ist die zweite Funktion $\Psi(\mathfrak{R})$ notwendig durch $T(\mathfrak{R})$ teilbar.

Ist zunächst $\Phi(\mathfrak{R})$ durch $T(\mathfrak{R})$ nicht teilbar, so kann der Quotient $\frac{\Phi(\mathfrak{R})}{T(\mathfrak{R})}$ auch nicht ganz in $\mathfrak{R}$ allein sein, und ferner ist die Primfunktion $T(\mathfrak{R})$ auch als Funktion von $\mathfrak{R}$ allein betrachtet irreduktibel und nicht als Faktor in Φ enthalten.

Um nun zu beweisen, daſs dann $T(\mathfrak{R})$ notwendig in $\Psi(\mathfrak{R})$ enthalten ist, betrachten wir zunächst $\Phi(\mathfrak{R})$ und $T(\mathfrak{R})$ als Funktionen von $\mathfrak{R}$ allein, und ermitteln nach dem von *Gauſs* auf Funktionen angewendeten *Euklid*ischen Verfahren ihren gröſsten gemeinsamen Teiler. Zu diesem Zwecke dividieren wir $\Phi(\mathfrak{R})$ durch $T(\mathfrak{R})$ und erhalten so einen Quotienten $H(\mathfrak{R})$ und einen Rest $-G_1(\mathfrak{R})$, welcher in $\mathfrak{R}$ von niedrigerem Grade ist als $T(\mathfrak{R})$; wir erhalten so eine Gleichung

$$\Phi(\mathfrak{R}) - H(\mathfrak{R})\,T(\mathfrak{R}) + G_1(\mathfrak{R}) = 0.$$

Dividieren wir nun $T(\mathfrak{R})$ durch $G_1(\mathfrak{R})$ und fahren in derselben Weise fort, so mufs die Entwickelung zuletzt einmal abbrechen, und wir erhalten schliefslich eine Kette von Gleichungen.

$$\begin{array}{llll}
\Phi & -H & T & +G_1=0 \\
T & -H_1 & G_1 & +G_2=0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
G_{\nu-2} & -H_{\nu-1} & G_{\nu-1} & +G_\nu=0 \\
G_{\nu-1} & -H_\nu & G_\nu & =0.
\end{array}$$

Hierbei sind die Funktionen bei der Division nur als von $\mathfrak{R}$ abhängig betrachtet; dieselben sind also ganze Funktionen von $\mathfrak{R}$, während ihre Koeffizienten rationale gebrochene Funktionen von $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots \mathfrak{R}^{(n)}$ sind. Dann mufs die letzte Funktion G_ν notwendig von $\mathfrak{R}$ unabhängig sein, denn aus jenen Gleichungen geht hervor, dafs G_ν ein Teiler von allen Funktionen $G_{\nu-1}, G_{\nu-2}, \dots G_1, T, \Phi$ ist. Wäre also G_ν nicht unabhängig von $\mathfrak{R}$, so müfste diese Funktion als Teiler der Primfunktion $T(\mathfrak{R})$ notwendig gleich $T(\mathfrak{R})$ sein, es wäre dann also gegen die Voraussetzung T in Φ enthalten. Aus der Auflösung der vorletzten und der drittletzten Gleichung nach G_ν und $G_{\nu-1}$ ergibt sich aber

$$\begin{aligned}
G_\nu &= H_{\nu-1} G_{\nu-1} - G_{\nu-2} \\
G_{\nu-1} &= H_{\nu-2} G_{\nu-2} - G_{\nu-3};
\end{aligned}$$

es ist also G_ν eine lineare homogene Funktion von $G_{\nu-1}$ und $G_{\nu-2}$, und $G_{\nu-1}$ eine solche von $G_{\nu-2}$ und $G_{\nu-3}$; also ist auch G_ν eine solche von $G_{\nu-2}, G_{\nu-3}$; und durch analoges Weiterschliefsen ergibt sich, dafs G_ν eine homogene lineare Funktion von je zwei aufeinanderfolgenden Funktionen der Reihe $G_{\nu-1}, \dots G_1, T, \Phi$, also auch von T und Φ ist, deren Koeffizienten ganze Funktionen von $\mathfrak{R}$ mit rationalen Funktionen von $\mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)}$ als Koeffizienten sind. Es besteht also eine Gleichung

$$\Phi Q + T R = G_\nu,$$

oder durch Division mit der Funktion G_ν

$$\Phi Q_1 + T R_1 = 1,$$

in welcher Q_1 und R_1 ganze Funktionen von $\mathfrak{R}$ bedeuten, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $\mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)}$ sind.

Multipliziert man nun diese Gleichung mit Ψ, so ist in der Gleichung

$$(\Phi\Psi) Q_1 + T \Psi R_1 = \Psi$$

die linke Seite, als Funktion von $\mathfrak{R}$ allein betrachtet, durch T teilbar, weil nach unserer Voraussetzung dasselbe für das Produkt $\Phi\Psi$ gilt;

das gleiche gilt also auch von der rechten Seite, d. h. es ist der Quotient $\frac{\Psi}{T}$ eine ganze Funktion von $\mathfrak{R}$, deren Koeffizienten allerdings noch gebrochene Funktionen von $\mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)}$ sein könnten. Nach der im Eingange dieses Abschnittes gemachten Bemerkung mufs dann aber jener Quotient auch in $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \dots$ ganz sein, d. h. es mufs in der Tat, wie es bewiesen werden sollte, die mit Ψ bezeichnete ganze Gröfse des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)})$ durch die demselben Bereiche angehörige irreduktible ganze Gröfse T teilbar sein.

§ 5.

Mit Hilfe des im vorigen Abschnitte bewiesenen Satzes kann nunmehr leicht gezeigt werden:

> dafs jede ganze Gröfse $\Phi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots \mathfrak{R}^{(n)})$ des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \dots)$ auf eine und nur auf eine Weise in Primfaktoren desselben Bereiches zerlegt werden kann.

Ist nämlich die Gröfse Φ überhaupt zerlegbar, so kann sie durch die Anwendung der im § 3 auseinandergesetzten Methode in zwei Faktoren $F \cdot F_1$ zerfällt werden. Behandelt man dann jede dieser Funktionen ebenso wie vorher, und fährt so fort, so mufs man zuletzt nach einer endlichen Anzahl von Zerlegungen zu lauter unzerlegbaren Faktoren gelangen, weil bei jedem weiteren Schritte entweder der Grad der Funktion in Bezug auf mindestens eine der Unbestimmten verkleinert wird, oder, falls die Faktoren ganze Zahlen sein sollten, diese ihrer Gröfse nach verringert werden. So ergibt sich also jede Gröfse Φ als ein Produkt von Primfunktionen des Bereiches.

Angenommen nun, man wäre zu zwei verschiedenen derartigen Zerlegungen einer und derselben Funktion Φ gelangt, so würde sich durch die Division dieser beiden einander gleichen Ausdrücke für Φ eine Gleichung von der Form ergeben

$$1 = \frac{P_1 \dots P_h}{P_1' \dots P_{h_1}'},$$

wo im Zähler und im Nenner lauter Primfunktionen auftreten. Die Faktoren P' im Nenner können hier von vornherein als von den im Zähler auftretenden verschieden angenommen werden, da ja etwaige zugleich im Zähler und Nenner auftretenden Primteiler durch einfaches Heben beseitigt werden können. Dann können aber Zähler und Nenner dieses Bruches überhaupt keine Primfaktoren mehr aufser der Eins enthalten, d. h. die beiden Zerlegungen von Φ müssen identisch sein. Wäre nämlich etwa P_1 nicht gleich 1, so ergäbe sich aus der Gleichung

$$P_1 \ldots P_h = P_1' \ldots P_{h_1}',$$

daſs P_1 in dem Produkte rechts, also nach § 4 in mindestens einem seiner Faktoren enthalten wäre, und da diese unzerlegbar sind, so müſste, gegen die soeben gemachte Voraussetzung, P_1 mit einem der Faktoren $P_1', \ldots P_{h_1}'$ identisch sein.

Nachdem nunmehr die eindeutige Zerlegung aller ganzen Gröſsen des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ in Primfaktoren nachgewiesen ist, ergeben sich für die Gröſsen eines solchen Bereiches genau dieselben Sätze, wie sie in der elementaren Zahlentheorie für die ganzen Zahlen und für die rationalen Brüche bewiesen und benützt werden. Wir wollen nur die für die Folge wichtigen kurz hervorheben.

Zwei ganze Gröſsen Φ und Ψ des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ heiſsen teilerfremd oder relativ prim, wenn sie keinen gemeinsamen Primteiler besitzen. Jede rationale Gröſse des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ kann als ein Bruch $\frac{\Phi}{\Psi}$ dargestellt werden, in welchem Zähler und Nenner relativ prim sind; denn etwaige gemeinsame Teiler können ja auf rationalem Wege gefunden und durch Heben beseitigt werden. Ein solcher Quotient soll, wie in der Zahlentheorie, ein reduzierter Bruch genannt werden.

Hat man zwei verschiedene Ausdrücke derselben Gröſse in den Formen $\frac{\Phi}{\Psi}$ und $\frac{\Phi_1}{\Psi_1}$ und ist der Bruch $\frac{\Phi}{\Psi}$ ein reduzierter, so ist Φ_1 durch Φ und Ψ_1 durch Ψ teilbar; denn aus der Gleichung

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Phi_1}{\Psi_1}$$

ergeben sich ja die drei Gleichungen

$$\Phi_1 = \frac{\Phi \Psi_1}{\Psi}, \qquad \Psi_1 = \frac{\Psi \Phi_1}{\Phi}, \qquad \frac{\Phi_1}{\Phi} = \frac{\Psi_1}{\Psi},$$

von denen die erste lehrt, daſs $\Phi \Psi_1$ und, da Φ zu Ψ relativ prim ist, daſs Ψ_1 durch Ψ teilbar ist, während aus der zweiten das gleiche für Φ_1 und Φ folgt; endlich ergibt sich aus der dritten Gleichung, daſs

$$\Phi_1 = \Phi D, \qquad \Psi_1 = \Psi D$$

sein muſs.

Sind zwei reduzierte Brüche einander gleich, so können sich Zähler und Nenner des ersten von Zähler und Nenner des zweiten nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Ist nämlich

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Phi_1}{\Psi_1},$$

so folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dafs die ganze Gröfse Φ ein Teiler von Φ_1, aber auch, dafs Φ_1 ein Teiler von Φ ist. Aus den beiden so sich ergebenden Gleichungen

$$\Phi = D_1 \Phi_1, \qquad \Phi_1 = D \Phi$$

folgt aber

$$D D_1 = 1,$$

und hieraus ergibt sich, da D und D_1 ganze Gröfsen des Bereiches $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots)$ sein sollen,

$$D = D_1 = \pm 1;$$

es ist also in der Tat $\Phi_1 = \pm \Phi$, und $\Psi_1 = \pm \Psi$.

Sechzehnte Vorlesung.

Herleitung der Eigenschaften der Determinanten n^{ter} Ordnung aus dem Charakter der Lösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten. — Eindeutigkeit der Lösung. — Untersuchung der Nenner in jener Lösung. — Die Beziehung der Zähler in der Lösung zu ihrem gemeinsamen Nenner $\Theta(u_{gh})$. — Die Fundamentaleigenschaften der Funktion $\Theta(u_{gh})$. — Beweis des Multiplikationstheoremes für die Funktion $\Theta(u_{gh})$. — Anderer Beweis desselben Theoremes.

§ 1.

Wir wollen jetzt die Eigenschaften der Lösungen von n linearen Gleichungen für n Unbekannte $x_1, \ldots x_n$ mit unbestimmten Koeffizienten genau in derselben Weise untersuchen, wie dies früher für zwei und für drei Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten geschehen ist; und ebenso wie die Untersuchung dieser Gleichungen uns die vollständige Theorie der Determinanten zweiter und dritter Ordnung lieferte, wird uns die jetzt durchzuführende Betrachtung alle Eigenschaften der sogenannten Determinanten n^{ter} Ordnung ergeben.

Anstatt die Gleichungskoeffizienten, wie dies in den früheren einfachsten Fällen noch geschehen konnte, durch die ersten Buchstaben des Alphabetes $(a, b, c, \ldots)$ zu bezeichnen, und die zu den verschiedenen Gleichungen gehörigen Koeffizienten durch einen beigefügten Index zu charakterisieren, wollen wir jetzt alle Gleichungskoeffizienten, um ihre Unbestimmtheit gleich hervorzuheben, durch einen Buchstaben u bezeichnen und die Koeffizienten der verschiedenen Gleichungen durch einen ersten Index, die verschiedenen Koeffizienten einer und derselben Gleichung durch einen zweiten Index charakterisieren.

Wir wollen also annehmen, es seien uns n lineare Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, \ldots x_n$ in der Form gegeben

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
f_1 &= u_{10} + u_{11} x_1 + \cdots + u_{1n} x_n = 0 \\
&\vdots \\
f_n &= u_{n0} + u_{n1} x_1 + \cdots + u_{nn} x_n = 0
\end{aligned}
$$

oder in kürzerer Form geschrieben

$$(1a) \qquad f_h = \sum_{k=0}^{n} u_{hk} x_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n),$$

wo hier, wie stets im folgenden, $x_0 = 1$ gesetzt wird. Hier sollen die Koeffizienten u_{hk} unbestimmte Variable bedeuten. Es soll untersucht werden, ob und wie diese Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, \ldots x_n$ befriedigt werden können, d. h. ob es Funktionen der $n(n+1)$ Größen $(u_{h0}, u_{h1}, \ldots u_{hn})$ gibt, welche für $x_1, \ldots x_n$ in die Gleichungen (1) eingesetzt diese identisch befriedigen.

Schreibt man die $n(n+1)$ Gleichungskoeffizienten folgendermaßen

$$(1b) \qquad \begin{pmatrix} u_{10}, & u_{11}, & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & & \\ u_{n0}, & u_{n1}, & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

so erhält man ein rechtwinkliges System oder eine Matrix von $n(n+1)$ Elementen u_{gh}, welche in n Horizontalreihen oder Zeilen und $(n+1)$ Vertikalreihen oder Kolonnen angeordnet sind. Allgemein besteht die i^{te} Zeile aus den sämtlichen $(n+1)$ Koeffizienten $u_{i0}, u_{i1}, \ldots u_{in}$ von f_i, während jede k^{te} Kolonne die Koeffizienten einer und derselben Unbekannten x_k in den n Gleichungen enthält. Der Kürze wegen wollen wir die Elemente der ersten, zweiten ... n^{ten} Zeile zusammengenommen beziehlich durch

$$H_1, H_2, \ldots H_n,$$

die Elemente einer jeden der $(n+1)$ Kolonnen zusammen durch

$$V_0, V_1, V_2, \ldots V_n$$

bezeichnen, so daß also speziell V_0 die sämtlichen konstanten Glieder $u_{10}, \ldots u_{n0}$ enthält.

Es ist leicht, aus diesen n Gleichungen mit n Unbekannten ganz ebenso wie im § 1 der dritten Vorlesung durch Elimination von x_n $(n-1)$ lineare Gleichungen für die $(n-1)$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ herzuleiten. In der Tat erkennt man unmittelbar, daß die $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
f_1^{(1)} &= f_1 u_{nn} - f_n u_{1n} = v_{10} + v_{11} x_1 + v_{12} x_2 + \cdots + v_{1,n-1} x_{n-1} = 0 \\
f_2^{(1)} &= f_2 u_{nn} - f_n u_{2n} = v_{20} + v_{21} x_1 + v_{22} x_2 + \cdots + v_{2,n-1} x_{n-1} = 0 \\
&\vdots \\
f_{n-1}^{(1)} &= f_{n-1} u_{nn} - f_n u_{n-1,n} = v_{n-1,0} + v_{n-1,1} x_1 + v_{n-1,2} x_2 + \cdots + v_{n-1,n-1} x_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

zugleich mit den ursprünglichen erfüllt sind. Die Koeffizienten v_{ik} sind leicht zu bildende Determinanten zweiter Ordnung aus den Koeffi-

zienten u_{ik}; man findet, wie beiläufig erwähnt werden mag, offenbar die Koeffizienten $v_{i0}, v_{i1}, \ldots v_{i,n-1}$, wenn man von der mit u_{nn} multiplizierten Horizontalreihe H_i der Matrix (1b) die mit u_{in} multiplizierte letzte Reihe H_n subtrahiert; man erkennt dann auch sofort, daſs die so sich ergebenden Koeffizienten von x_n in der Tat sämtlich Null sind. — Bildet man nun aus diesem Gleichungssysteme auf genau dieselbe Weise das neue abgeleitete System von $(n-2)$ Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1^{(2)} &= f_1^{(1)} \; v_{n-1,n-1} - f_{n-1}^{(1)} v_{1,n-1} = 0 \\ f_2^{(2)} &= f_2^{(1)} \; v_{n-1,n-1} - f_{n-1}^{(1)} v_{2,n-1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-2}^{(2)} &= f_{n-2}^{(1)} v_{n-1,n-1} - f_{n-1}^{(1)} v_{n-2,n-1} = 0, \end{aligned}$$

so erkennt man genau ebenso, daſs hier die Unbekannte x_{n-1} fortgefallen ist, und durch Fortsetzung desselben Verfahrens erhält man zuletzt eine einzige lineare Gleichung

$$f_1^{(n-1)} = w_{10} + w_{11} x_1 = 0,$$

in welcher w_{10} und w_{11} zwei ganze ganzzahlige Funktionen der ursprünglichen Gleichungskoeffizienten (u_{ik}) sind. Durch Auflösung dieser Gleichung ergibt sich endlich

$$x_1 = -\frac{w_{11}}{w_{10}}.$$

Da man dann ähnliche Werte für $x_2, \ldots x_n$ erhält, so würde aus dieser Auflösungsmethode geschlossen werden können, daſs sich die n Unbekannten als rationale Funktionen der $n(n+1)$ Gleichungskoeffizienten (u_{ik}) mit ganzzahligen Koeffizienten ergeben, oder was dasselbe ist, daſs die n Unbekannten Gröſsen des durch die $n(n+1)$ Koeffizienten (u_{ik}) konstituierten Rationalitätsbereiches sind.

Jedoch wurde bereits a. a. O. hervorgehoben, daſs sich bei dem Verfahren successiver Elimination nicht ohne weiteres übersehen läſst, ob ebenso wie die Eliminationsgleichungen eine notwendige Folge der ursprünglichen sind, diese auch umgekehrt aus jenen folgen, und ob nicht der Fall eintreten kann, daſs eine oder mehrere der Eliminationsgleichungen identisch verschwinden. Anstatt nun den Nachweis zu führen, daſs für unbestimmte Koeffizienten (u_{ik}) keiner dieser Fälle eintreten kann, was keine groſsen Schwierigkeiten bieten würde, wollen wir auch hier das oben gefundene Ergebnis nur als Annahme unserer Betrachtung zu Grunde legen und dann untersuchen, welche weiteren Eigenschaften jene Lösungen haben müssen. Wir werden dadurch zu einer höchst einfachen Herleitung aller Eigenschaften der Determinanten

n^{ter} Ordnung hingeführt, und wir erkennen dann eben aus diesen Grundeigenschaften der Determinanten, daſs die hier gemachten fast selbstverständlichen Annahmen auch wirklich berechtigt sind.

Wir wollen also bei unserer allgemeinen Untersuchung von der folgenden fundamentalen Voraussetzung ausgehen:

> Jedes System von n linearen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten besitzt für unbestimmte Werte der Koeffizienten mindestens eine Lösung, und zwar sind die Unbekannten rationale ganzzahlige Funktionen der Gleichungskoeffizienten oder sie gehören dem Rationalitätsbereiche der Koeffizienten an.

Oder, was ganz dasselbe ist:

> Es gibt n rationale Funktionen der $n(n+1)$ Unbestimmten u_{ik}, welche für $x_1, x_2, \ldots x_n$ in die Gleichungen (1) eingesetzt, diese identisch befriedigen.

Es werde aber ausdrücklich hervorgehoben, daſs diese Voraussetzung nicht etwa nur für einen speziellen, sondern für jeden Wert von n gemacht wird.

§ 2.

Zunächst wollen wir genau wie im § 2 der achten Vorlesung den Beweis führen, daſs unter der gemachten Voraussetzung jedes Gleichungssystem

$$f_i = u_{i0} + u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + \cdots + u_{in}x_n = 0 \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{1}$$

mit unbestimmten Koeffizienten nur eine einzige Lösung besitzt, daſs also die n Unbekannten $x_1, \ldots x_n$ durch jene Gleichungen eindeutig bestimmt sind. Um dies zunächst für x_1 zu beweisen, fügen wir zu dem Systeme (1) die aus ihm abgeleitete Gleichung hinzu

$$F = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_{n-1} f_{n-1} + f_n = 0, \tag{2}$$

welche offenbar durch jede Lösung von (1) befriedigt wird und daher dem Systeme (1) zugefügt werden kann, ohne seine Lösungen zu ändern. Wir bestimmen jetzt die noch willkürlichen Gröſsen $y_1, \ldots y_{n-1}$ so, daſs die Koeffizienten von $x_2, x_3, \ldots x_n$ sämtlich verschwinden, d. h. so, daſs die $(n-1)$ Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{l} u_{12}\, y_1 + u_{22}\, y_2 + \cdots + u_{n-1,2}\, y_{n-1} + u_{n2} = 0 \\ u_{13}\, y_1 + u_{23}\, y_2 + \cdots + u_{n-1,3}\, y_{n-1} + u_{n3} = 0 \\ \vdots \\ u_{1n}\, y_1 + u_{2n}\, y_2 + \cdots + u_{n-1,n}\, y_{n-1} + u_{nn} = 0 \end{array} \tag{3}$$

erfüllt sind. Da die $n(n-1)$ Koeffizienten dieser $n-1$ Gleichungen ebenfalls unbestimmte Größen sind, so besitzen dieselben nach unserer allgemeinen Voraussetzung mindestens eine Lösung, und zwar hängen $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ allein, und zwar rational von den Koeffizienten desjenigen Systemes $(u_{i2}, u_{i3}, \ldots u_{i,n})$ ab, welches aus dem ursprünglichen Systeme $(u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, \ldots u_{in})$ durch Weglassung der beiden ersten Vertikalreihen V_0 und V_1 entsteht.

Es sei nun $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ eine bestimmte rationale Lösung dieser $(n-1)$ Gleichungen (3), so geht die abgeleitete Gleichung (2) über in

$$F = (u_{10} y_1 + \cdots + u_{n-1,0} y_{n-1} + u_{n0}) \\ + x_1(u_{11} y_1 + \cdots + u_{n-1,1} y_{n-1} + u_{n1}) = 0.$$

Hier kann der Koeffizient von x_1 für unbestimmte $(u_{11}, u_{21}, \ldots u_{n1})$ nicht identisch verschwinden, da sich u_{n1} sicher nicht forthebt; also erhält man für x_1 den einen eindeutig bestimmten Wert

$$x_1 = -\frac{u_{10} y_1 + u_{20} y_2 + \cdots + u_{n-1,0} y_{n-1} + u_{n0}}{u_{11} y_1 + u_{21} y_2 + \cdots + u_{n-1,1} y_{n-1} + u_{n1}} \tag{4}$$

und damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen. Ganz ebenso läßt sich zeigen, daß unter der gemachten Voraussetzung auch $x_2, x_3, \ldots x_n$ eindeutig bestimmte rationale Funktionen der Elemente (u_{ik}) sind.

Bei diesem Beweise brauchte nicht vorausgesetzt zu werden, daß auch die konstanten Glieder $(u_{10}, u_{20}, \ldots u_{n0})$ der Vertikalreihe V_0 Unbestimmte sind; alle hier benützten Schlüsse bleiben richtig, wenn man ihnen beliebige spezielle Zahlenwerte beilegt. Wir können daher auch den für die Folge wichtigen Satz aussprechen:

> Durch n lineare Gleichungen, in denen die Koeffizienten der n Unbekannten $(u_{i1}, u_{i2}, \ldots u_{in})$ Unbestimmte sind, werden die Unbekannten eindeutig bestimmt, auch wenn die konstanten Glieder $(u_{10}, u_{20}, \ldots u_{n0})$ ganz beliebige Zahlenwerte besitzen.

Sind speziell $u_{10} = u_{20} = \cdots = u_{n0} = 0$, betrachtet man also die n linearen homogenen Gleichungen

$$u_{i1} x_1 + u_{i2} x_2 + \cdots + u_{in} x_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so besitzen diese nach dem soeben bewiesenen Satze für unbestimmte $(u_{i1}, u_{i2}, \ldots u_{in})$ die Lösung $(x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0)$ und keine andere.

§ 3.

Aus unserer allgemeinen Voraussetzung in Verbindung mit dem Resultate des vorigen Abschnittes ergibt sich, daß durch die Glei-

chungen $(f_i = 0)$ die n Unbekannten $x_1, \dots x_n$ eindeutig als rationale ganzzahlige Funktionen der Gleichungskoeffizienten bestimmt sind, d. h. daſs

$$(1) \qquad x_1 = \frac{X_1(u_{gh})}{\Theta_1(u_{gh})}, \dots \quad x_n = \frac{X_n(u_{gh})}{\Theta_n(u_{gh})}$$

ist, wo die noch unbekannten Gröſsen X_i und Θ_i ganze ganzzahlige Funktionen der $n(n+1)$ Elemente der Matrix

$$(u_{gh}) \qquad \binom{g = 1, 2, \dots n}{h = 0, 1, 2, \dots n}$$

sind. Wir wollen und können jene Brüche für $x_1, \dots x_n$ von vornherein in ihrer reduzierten Form annehmen, d. h. etwa vorhandene gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner bereits durch Heben beseitigt denken; durch diese Annahme sind dann die Zähler und Nenner bis auf ihr Vorzeichen eindeutig bestimmt; wir wollen über dieses zunächst noch keine Voraussetzung machen.

Wir beweisen dann den weiteren wichtigen Satz:

Die Nenner $\Theta_1(u_{gh}), \dots \Theta_n(u_{gh})$ von $x_1, \dots x_n$ sind einander gleich.

Wir brauchen nur zu zeigen, daſs von zwei beliebigen Nennern Θ_q und Θ_r jeder durch den anderen teilbar ist; denn daraus folgt ja, daſs sie sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden können. Wir können und wollen dann den Nennern ein solches Vorzeichen beilegen, daſs sie auch dem Vorzeichen nach gleich werden. Es genügt auch hier, nachzuweisen, daſs der zweite Nenner Θ_2 durch den ersten Θ_1 teilbar ist; wörtlich ebenso kann dann der Beweis für irgendwelche Nenner Θ_q und Θ_r geführt werden.

Um dies zu zeigen, führen wir in die Gleichungen

$$(2) \qquad f_g = u_{g0} + u_{g1} x_1 + u_{g2} x_2 + \dots + u_{gn} x_n = 0 \qquad (g = 1, 2, \dots n)$$

an Stelle von $x_1, x_2, \dots x_n$ neue Unbekannte $x_1', x_2', \dots x_n'$ durch die elementaren Transformationsformeln ein

$$(3) \qquad x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2' + t x_1', \quad x_k = x_k' \qquad (k > 2),$$

wo t eine variable Gröſse ist; ihre Auflösung ist dann einfach die folgende

$$(3\text{a}) \qquad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 - t x_1, \quad x_k' = x_k \qquad (k > 2).$$

Dadurch gehen die Gleichungen $f_g = 0$ für $x_1, \dots x_n$ in die folgenden Gleichungen für $x_1', \dots x_n'$ über

$$(4) \qquad f_g' = u_{g0} + (u_{g1} + t u_{g2}) x_1' + u_{g2} x_2' + \dots + u_{gn} x_n' = 0,$$

oder kürzer geschrieben in

(4a) $$f'_g = u'_{g0} + u'_{g1} x'_1 + u'_{g2} x'_2 + \cdots + u'_{gn} x'_n = 0,$$

deren Koeffizientensystem

$$(u'_{gh}) \quad \text{oder} \quad (u')$$

sich von dem vorher betrachteten

$$(u_{gh}) \quad \text{oder} \quad (u)$$

nur dadurch unterscheidet, daſs in diesem zu den Elementen der Vertikalreihe V_1 die mit t multiplizierten entsprechenden Elemente der Kolonne V_2 addiert sind. Bezeichnet man also die Kolonnen der Matrix (u') mit V'_h, so ist

$$V'_0 = V_0, \quad V'_1 = V_1 + t V_2, \quad V'_k = V_k \qquad (k > 1).$$

Da nun die Koeffizienten (u'_{gh}) des Gleichungssystemes $f'_g = 0$ für unbestimmte Werte der (u_{gh}) ebenfalls unbestimmte Variable sind, so besitzt auch dieses eine einzige Lösung, und zwar ist nach (1)

$$x'_i = \frac{X_i(u')}{\Theta_i(u')},$$

während

$$x_i = \frac{X_i(u)}{\Theta_i(u)}$$

war.

Da nun nach (3a)

$$x'_2 = x_2 - t x_1$$

ist, so ergibt sich durch Einsetzen der Werte von x_1, x_2, x'_2 die folgende Gleichung

$$\frac{X_2(u')}{\Theta_2(u')} = \frac{X_2(u)}{\Theta_2(u)} - t\,\frac{X_1(u)}{\Theta_1(u)},$$

welche für ein variables t identisch bestehen muſs.

In dieser Identität bringen wir die rechte Seite auf gleichen Nenner: Es sei $T(u)$ der gröſste gemeinsame Teiler der beiden Nenner $\Theta_2(u)$ und $\Theta_1(u)$, so daſs also

$$\Theta_1(u) = T(u)\,\Psi_1(u); \qquad \Theta_2(u) = T(u)\,\Psi_2(u)$$

ist, und die beiden ganzen Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 keine gemeinsamen Teiler mehr besitzen. Dann kann die letzte Gleichung folgendermaſsen geschrieben werden

(5) $$\frac{X_2(u')}{\Theta_2(u')} = \frac{X_2(u)\,\Psi_1(u) - t\,X_1(u)\,\Psi_2(u)}{T(u)\,\Psi_1(u)\,\Psi_2(u)},$$

wo die Funktionen, welche auf der rechten Seite im Zähler und Nenner stehen, die Variable t gar nicht enthalten.

Man kann nun genau wie auf S. 121 zeigen, daſs der Bruch auf der rechten Seite der Gleichung (5) in seiner reduzierten Form er-

scheint, d. h. daſs sein Zähler und sein Nenner keinen einzigen gemeinsamen Primteiler enthalten. Da nämlich im Nenner die Variable t gar nicht vorkommt, so müſste jener Teiler in jedem der beiden Terme des Zählers enthalten sein, d. h. es müſsten die drei Produkte

$$(T\,\Psi_1\,\Psi_2,\ X_2\,\Psi_1,\ X_1\,\Psi_2) \tag{6}$$

einen gemeinsamen Primteiler P enthalten. Nun hat aber keins der drei Paare von Funktionen

$$(X_1,\ T\,\Psi_1),\quad (X_2,\ T\,\Psi_2),\quad (\Psi_1,\ \Psi_2)$$

einen gemeinsamen Teiler; die beiden ersten nicht, weil $\frac{X_1}{T\Psi_1}$ und $\frac{X_2}{T\Psi_2}$ in der reduzierten Form angenommen waren, das letzte nicht, weil Ψ_1 und Ψ_2 die von dem gemeinsamen Divisor befreiten Teile von Θ_1 und Θ_2 sind.

Angenommen nun, es existierte ein Primteiler P, welcher in den drei Produkten (6) enthalten ist, so müſste er entweder in einer der beiden Funktionen Ψ_1, Ψ_2 oder in T enthalten sein. Wäre aber die Gröſse P z. B. in Ψ_1 enthalten, so müſste sie nach (6) auch ein Teiler von $X_1\,\Psi_2$ sein, und dies widerstreitet die Annahme, daſs Ψ_1 sowohl zu X_1 als auch zu Ψ_2 relativ prim ist. Ebensowenig kann P ein Teiler von Ψ_2 sein. Endlich kann jener gemeinsame Teiler auch nicht in T enthalten sein; denn da T zu X_1 und zu X_2 relativ prim ist, so müſste jener Teiler zugleich in Ψ_1 und Ψ_2 aufgehen, was wieder mit der oben gemachten Annahme im Widerspruche steht.

Damit ist also bewiesen, daſs der Bruch auf der rechten Seite von (5) in der Tat in der reduzierten Form gegeben ist. Da nun der Bruch $\frac{X_2(u')}{\Theta_2(u')}$ diesem identisch gleich ist, so folgt, daſs sein Nenner $\Theta_2(u')$ durch den Nenner $T(u)\,\Psi_1(u)\,\Psi_2(u)$, also a fortiori durch

$$T(u)\,\Psi_1(u) = \Theta_1(u)$$

allein teilbar ist, und zwar für variable Werte von t. Es besteht also eine Gleichung

$$\Theta_2(u'_{gh}) = \Theta_1(u_{gh}) \cdot G(u_{gh},\ t),$$

wo G eine ganze ganzzahlige Funktion der Unbestimmten u_{gh} und t ist. Setzt man in dieser Gleichung speziell $t = 0$, wodurch das System (u'_{gh}) in (u_{gh}) übergeht, so ergibt sich die Gleichung

$$\Theta_2(u_{gh}) = \Theta_1(u_{gh}) \cdot G(u_{gh},\ 0);$$

und da man ebenso beweisen kann, daſs auch Θ_1 durch Θ_2 teilbar ist, so folgt, daſs $G(u_{gh}) = \pm 1$ ist, d. h. daſs Θ_1 und Θ_2 sich höchstens durch das Vorzeichen unterscheiden können. Wörtlich ebenso beweist

man, daſs sich alle Nenner voneinander höchstens durch das Vorzeichen unterscheiden können.

Wir wollen nun die bis jetzt noch willkürlichen Vorzeichen von $\Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_n$ so bestimmen, daſs

$$\Theta_1(u_{gh}) = \Theta_2(u_{gh}) = \cdots = \Theta_n(u_{gh})$$

ist, und wir wollen den so gefundenen gemeinsamen Nenner durch

$$\Theta(u_{gh})$$

bezeichnen. Dann ergeben sich jetzt für $x_1, \ldots x_n$ die folgenden Ausdrücke

$$x_1 = \frac{X_1(u_{gh})}{\Theta(u_{gh})}, \ldots \qquad x_n = \frac{X_n(u_{gh})}{\Theta(u_{gh})},$$

wo die $(n+1)$ Funktionen $X_1, \ldots X_n$, Θ ganze ganzzahlige Funktionen der Gröſsen u_{gh} sind, und wo jede Funktion X_i relativ prim zu dem gemeinsamen Nenner Θ ist.

§ 4.

Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes wissen wir, daſs, falls das Gleichungssystem

$$(1) \qquad f_h = u_{h0} + \Sigma u_{hk} x_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

überhaupt rationale Lösungen besitzt, die Unbekannten $x_1, \ldots x_n$ durch diese Gleichungen eindeutig als ganzzahlige rationale Funktionen der Koeffizienten (u_{hk}) bestimmt sind, welche in ihrer reduzierten Form alle denselben Nenner $\Theta(u_{gh})$ besitzen. Wir wollen nun zunächst die Abhängigkeit der Lösungen von den konstanten Gliedern $(u_{10}, u_{20}, \ldots u_{n0})$ untersuchen, welche sich also in der Kolonne V_0 der Matrix (u_{hk}) befinden. Wir werden hier den Satz beweisen:

> Die Lösungen $x_1, \ldots x_n$ des Gleichungssystemes (1) sind homogene lineare Funktionen der n Elemente $u_{10}, u_{20}, \ldots u_{n0}$.

Die Richtigkeit dieses Satzes kann leicht aus der auf S. 267 (4) gegebenen Darstellung jener Lösung geschlossen werden. Ebenso leicht und ohne jede Rechnung erhalten wir aber den Beweis dieser Tatsache durch die folgende einfache Überlegung: Wir betrachten $x_1, \ldots x_n$ als Funktionen der Elemente u_{h0} von V_0 allein; es sei also

$$(2) \qquad x_1 = \Phi_1(u_{10}, \ldots u_{n0}), \ldots \quad x_n = \Phi_n(u_{10}, \ldots u_{n0}),$$

wo diese n Gröſsen Φ_i rationale Funktionen von $u_{10}, \ldots u_{n0}$ sind.

Wir betrachten nun die Lösungen der drei folgenden Systeme von je n Gleichungen

$$u_{h0} + \sum_{k=1}^{n} u_{hk} x_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

(3)
$$u'_{h0} + \sum_{k=1}^{n} u_{hk} x'_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

$$(u_{h0} + u'_{h0}) + \sum_{k=1}^{n} u_{hk} x''_k = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n),$$

deren Koeffizientensysteme sich nur dadurch voneinander unterscheiden, dafs die konstanten Glieder beziehlich u_{h0}, u'_{h0}, $(u_{h0} + u'_{h0})$ sind. Nimmt man nun die $2n$ Elemente $(u_{10}, \dots u_{n0})$ und $(u'_{10}, \dots u'_{n0})$ als unbestimmte Variable an, so sind nach dem soeben bewiesenen Satze die Unbekannten (x_k), (x'_k), (x''_k) durch diese drei Gleichungssysteme eindeutig bestimmt, und zwar ergeben sich ihre Werte aus (2), wenn man die Gröfsen u_{h0} beziehlich ersetzt durch u_{h0}, u'_{h0}, $u_{h0} + u'_{h0}$. Man erhält also für sie die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x_k &= \Phi_k(\dots u_{h0} \dots) \\ x'_k &= \Phi_k(\dots u'_{h0} \dots) \\ x''_k &= \Phi_k(\dots u_{h0} + u'_{h0} \dots). \end{aligned}$$

Addiert man nun je zwei entsprechende Gleichungen der beiden ersten Systeme zueinander und vergleicht die so entstehenden Gleichungen

$$(u_{h0} + u'_{h0}) + \sum_{k=1}^{n} u_{hk}(x_k + x'_k) = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

mit dem letzten Systeme in (3), so ergibt sich, dafs $(x_1 + x'_1), \dots (x_n + x'_n)$ die Lösung des dritten Systemes ist; und da dieses nur eine einzige Lösung hat, so folgt

$$x''_k = x_k + x'_k.$$

Hieraus folgt also, dafs die n Funktionen $\Phi_k(\dots u_{h0} \dots)$ der Funktionalgleichung genügen

(5) $$\Phi_k(u_{10} + u'_{10}, \dots u_{n0} + u'_{n0}) = \Phi_k(u_{10}, \dots u_{n0}) + \Phi_k(u'_{10}, \dots u'_{n0}).$$

Nun kann man sehr leicht zeigen, dafs eine rationale Funktion von n Variablen

$$\Phi(u_1, \dots u_n),$$

für welche die Funktionalgleichung besteht

(6) $$\Phi(u_1 + u'_1, \dots u_n + u'_n) = \Phi(u_1, \dots u_n) + \Phi(u'_1, \dots u'_n)$$

eine homogene lineare Funktion derselben mit konstanten Koeffizienten sein mufs.

Setzt man nämlich $(u_1, u_2, \dots u_n)$ und $(u'_1, u'_2, \dots u'_n)$ beziehlich gleich $(u_1, 0, \dots 0)$ und $(0, u_2, \dots u_n)$, so folgt aus jener Gleichung

$$\Phi(u_1, \dots u_n) = \Phi(u_1, 0, \dots 0) + \Phi(0, u_2, \dots u_n),$$

wo also der erste Summand eine rationale Funktion von u_1 allein ist, während der zweite u_1 gar nicht mehr enthält; und indem man den zweiten Summanden rechts genau ebenso behandelt und die entsprechende Zerlegung so lange fortsetzt, als noch Variable vorhanden sind, erhält man zuletzt für die Funktion Φ die Darstellung

$$\Phi(u_1, u_2, \dots u_n) = \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_2) + \cdots + \Phi_n(u_n), \tag{7}$$

wo die n Funktionen rechts rationale Funktionen von je einer Variablen sind. Ersetzt man in dieser Gleichung wieder allgemein u_i durch $u_i + u'_i$ und beachtet die Gleichung (6), so ergibt sich weiter, dafs für jede dieser n Funktionen die entsprechende Gleichung besteht

$$\Phi_i(u_i + u'_i) = \Phi_i(u_i) + \Phi_i(u'_i) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Eine rationale Funktion von nur einer Variablen $\Phi(u)$, welche der Gleichung

$$\Phi(u + u') = \Phi(u) + \Phi(u') \tag{7a}$$

genügt, mufs aber von der Form Cu sein, wo C eine Konstante bedeutet. Setzt man nämlich $u' = h$, so folgt aus dieser Gleichung für $h = 0$

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi(u+h) - \Phi(u)}{h} = \frac{d\Phi}{du} = \lim_{h=0} \frac{\Phi(h)}{h} = C,$$

da ja $\frac{\Phi(h)}{h}$ von u überhaupt nicht mehr abhängt, und hieraus ergibt sich zunächst $\Phi(u) = Cu + C_1$, und da wegen (7a) $C_1 = 0$ sein mufs, so folgt in der Tat

$$\Phi(u) = Cu.$$

Mit Hilfe dieses Satzes geht der Ausdruck (7) für die zu untersuchende Funktion über in

$$\Phi(u_1, \dots u_n) = C_1 u_1 + \cdots + C_n u_n,$$

wo $C_1, \dots C_n$ von $u_1, \dots u_n$ unabhängig sind. Es ist also auch jede der n Funktionen $\Phi_k(u_{10}, \dots u_{n0})$, welche den Wert der Unbekannten x_k darstellen, eine homogene lineare Funktion der konstanten Glieder $u_{10}, \dots u_{n0}$ mit Koeffizienten, welche von den Elementen der Reihe V_0 unabhängig sind, welche also rationale Funktionen der n^2 Elemente

$$(u_{h1}, u_{h2}, \dots u_{hn}) \qquad (h = 1, 2, \dots n)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten sind.

Hiernach können jetzt also die n Werte der Unbekannten $x_1, \dots x_n$ folgendermaßen dargestellt werden

$$x_1 = \frac{X_1(u_{gh})}{\Theta(u_{gh})}, \dots \quad x_n = \frac{X_n(u_{gh})}{\Theta(u_{gh})},$$

wo jetzt Zähler und Nenner der Brüche keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Dann ist nach unserem Satze jeder Zähler eine homogene lineare Funktion der Elemente $u_{10}, \dots u_{n0}$, während der gemeinsame Nenner dieselben gar nicht enthält.

§ 5.

Wir wollen jetzt endlich untersuchen, in welcher Beziehung die Zähler $X_1, X_2, \dots X_n$ der Lösung unseres Gleichungssystemes zu dem gemeinsamen Nenner Θ stehen. Wir werden leicht zeigen, daß jene genau dieselben Funktionen wie die Funktion im Nenner sind, daß sie aber von anderen Variablen abhängen.

Setzen wir für den Augenblick der Gleichförmigkeit wegen den gemeinsamen Nenner

$$\Theta(u_{gh}) = X_0(u_{gh}),$$

so befriedigen die n rationalen Funktionen

$$x_k = \frac{X_k}{X_0}$$

identisch die n Gleichungen

$$f_h = u_{h0} + u_{h1} x_1 + \cdots + u_{hn} x_n = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n). \tag{1}$$

Setzt man also jene Werte in diese Gleichungen ein und multipliziert sie mit dem gemeinsamen Nenner X_0, so ergeben sich die Identitäten

$$u_{h0} X_0 + u_{h1} X_1 + \cdots + u_{hn} X_n \equiv 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n), \tag{2}$$

wo das von *Riemann* eingeführte Zeichen $\equiv$ bedeutet, daß die Gleichungen für variable Werte der Koeffizienten

$$(u_{h0}, u_{h1}, \dots u_{hn})$$

identisch erfüllt sind, wenn man unter $X_0, \dots X_n$ eben die betreffenden ganzen ganzzahligen Funktionen der Koeffizienten (u_{hk}) versteht.

Da diese Gleichungen reine Identitäten sind, so bleiben sie bestehen, wenn man in der Matrix (u_{gh}) die Elemente einer Kolonne mit denen einer anderen vertauscht; nur muß man natürlich dieselbe Vertauschung auch in den $n+1$ ganzen Funktionen X_k vornehmen. Wir wollen nun die Elemente der Kolonne V_0 mit den entsprechenden

Elementen einer anderen Vertikalreihe V_q vertauschen, d. h. jetzt das Koeffizientensystem

$$(V_q, V_1, \ldots V_{q-1}, V_0, V_{q+1}, \ldots) = (u_{hq}, u_{h1}, \ldots u_{h0}, \ldots u_{hn}) \quad (h=1,2,\ldots n)$$

betrachten. Bezeichnet man die Werte, welche die ganzen Funktionen $X_0, X_1, \ldots X_n$ bei dieser Vertauschung erhalten, beziehlich durch $X_0', X_1', \ldots X_n'$, so bestehen für sie die Identitäten

$$u_{hq} X_0' + u_{h1} X_1' + \cdots + u_{h0} X_q' + \cdots + u_{hn} X_n' = 0,$$

oder bei Vertauschung des ersten mit dem $(q+1)^{\text{ten}}$ Summanden in jeder dieser Summen

$$(3) \qquad u_{h0} X_q' + u_{h1} X_1' + \cdots + u_{hq} X_0' + \cdots + u_{hn} X_n' \equiv 0.$$

Bei dieser Schreibweise erkennt man nun, daſs die Gleichungssysteme (2) und (3) in ihren Koeffizienten völlig übereinstimmen. Dividiert man also die Gleichungen (3) sämtlich durch X_q', so sieht man, daſs sich hier die Lösung der Gleichungen (1) in der Form darstellt

$$x_1 = \frac{X_1'}{X_q'}, \ldots, \quad x_q = \frac{X_0'}{X_q'}, \ldots, \quad x_n = \frac{X_n'}{X_q'}.$$

Vergleicht man die beiden Werte von x_q, welche identisch sein müssen, miteinander, so folgt

$$\frac{X_0'}{X_q'} = \frac{X_q}{X_0},$$

und da beide Brüche in der reduzierten Form gegeben sind, so müssen ihre Zähler und ihre Nenner einander bis auf das Vorzeichen gleich sein; es ist also

$$X_q = \pm X_0' = \pm \Theta(u_{gh}),$$

d. h. der Zähler von x_q geht, abgesehen vom Vorzeichen, aus dem gemeinsamen Nenner Θ dadurch hervor, daſs man in ihm die Elemente der Kolonne V_q durch die entsprechenden Elemente von V_0 ersetzt; und da dasselbe für jeden der n Zähler von $x_1, \ldots x_n$ gilt, so ergibt sich der Satz:

> Der Zähler des Bruches für x_k geht aus dem gemeinsamen Nenner Θ, abgesehen vom Vorzeichen, dadurch hervor, daſs man in Θ die Elemente $u_{1k}, \ldots u_{nk}$ der Kolonne V_k beziehlich durch die Elemente $u_{10}, \ldots u_{n0}$ der Kolonne V_0 ersetzt.

Da nun der Nenner Θ die Elemente u_{h0} gar nicht enthält, also in der Form geschrieben werden kann

$$\Theta(u_{h1}, u_{h2}, \dots u_{hn}) = \Theta(V_1, V_2, \dots V_n),$$

so ergeben sich allgemein für die Zähler $X_1, X_2, \dots X_n$ die Ausdrücke

$$X_1 = \pm\, \Theta(V_0, V_2, \dots V_n), \quad X_2 = \pm\, \Theta(V_1, V_0, \dots V_n), \dots$$
$$X_n = \pm\, \Theta(V_1, V_2, \dots V_0).$$

Wir wollen jetzt diejenige ganze Funktion, welche aus dem Nenner $\Theta(V_1, V_2, \dots V_n)$ hervorgeht, wenn man allgemein V_ϱ durch V_0 oder, was dasselbe ist, wenn man $u_{h\varrho}$ durch u_{h0} ersetzt, durch Θ_ϱ bezeichnen; dann wird also X_ϱ, abgesehen vom Vorzeichen, gleich Θ_ϱ, und man erhält hiernach für die n Unbekannten die folgenden Ausdrücke

$$(4) \qquad x_1 = \varepsilon_1 \frac{\Theta_1}{\Theta}, \quad x_2 = \varepsilon_2 \frac{\Theta_2}{\Theta}, \dots \quad x_n = \varepsilon_n \frac{\Theta_n}{\Theta},$$

wo die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ nur einen der Werte ± 1 haben können.

Die letzte Frage, welchen der beiden Werte ± 1 die Zahlen ε_i besitzen, kann nun sehr einfach durch die folgende Betrachtung entschieden werden (vergl. S. 124). Um das Vorzeichen ε_1 von x_1 zu bestimmen, betrachten wir die Gleichungen, welche aus (1) dadurch hervorgehen, daſs wir die konstanten Glieder u_{h0}, d. h. die Elemente von V_0 durch die entsprechenden Elemente u_{h1} von V_1 ersetzen, also die n Gleichungen

$$(5) \qquad u_{h1} + u_{h1} x_1 + u_{h2} x_2 + \dots + u_{hn} x_n = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots n).$$

Auch diese Gleichungen besitzen nach den am Schlusse von § 2 gemachten Bemerkungen für unbestimmte $(u_{h1}, u_{h2}, \dots u_{hn})$ eine einzige Lösung, und diese geht demnach dadurch aus der allgemeinen hervor, daſs man dort die Vertikalreihe V_0 durch V_1 ersetzt. Es muſs also sein

$$(6) \quad x_1 = \varepsilon_1 \frac{\Theta(V_1, V_2, \dots V_n)}{\Theta(V_1, V_2, \dots V_n)} = \varepsilon_1, \quad x_2 = \varepsilon_2 \frac{\Theta(V_1, V_1, V_3, \dots V_n)}{\Theta(V_1, V_2, V_3, \dots V_n)}, \dots$$

Anderseits erkennt man sofort durch einfache Substitution, daſs jene Gleichungen (5) durch das Wertsystem

$$(6a) \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \dots \quad x_n = 0$$

befriedigt werden, und da diese zweite Lösung (6a) notwendig mit der ersten in (6) übereinstimmt, so ergibt sich $\varepsilon_1 = -1$; ganz ebenso wird bewiesen, daſs in (4) für ε_i jedesmal -1 zu setzen ist. Es ergibt sich also

$$x_1 = -\frac{\Theta_1}{\Theta}, \quad x_2 = -\frac{\Theta_2}{\Theta}, \dots \quad x_n = -\frac{\Theta_n}{\Theta}.$$

Durch Vergleichung der beiden hier gefundenen Werte für x_2 ergibt sich ferner die Identität: $\Theta(V_1, V_1, V_3, \dots V_n) = 0$. Die Funk-

tion Θ verschwindet also identisch, wenn die Elemente der Vertikalreihe V_2 durch die entsprechenden Elemente von V_1 ersetzt werden. Und da offenbar genau dasselbe für zwei ganz beliebige Vertikalreihen bewiesen werden kann, so ergibt sich der folgende Satz:

> Die Funktion $\Theta(V_1, V_2, \ldots V_n)$ verschwindet identisch, wenn die Elemente irgend einer Kolonne V_q durch die entsprechenden irgend einer anderen Kolonne V_r ersetzt werden.

Aus dem auf S. 275 bewiesenen Satze fließt noch ein wichtiges Korollar: Es war im vorigen Abschnitte nachgewiesen worden, daß jeder der Zähler $\Theta_1, \ldots \Theta_n$ homogen und linear in den Elementen der Kolonne V_0 ist, während der Nenner Θ diese gar nicht enthält. Da aber z. B. Θ_1 dadurch in Θ übergeht, daß dort die Elemente von V_0 ersetzt werden durch die Elemente von V_1, so folgt, daß der Nenner Θ eine homogene lineare Funktion der Elemente von V_1 ist; und da dasselbe für die Elemente von $V_2, \ldots V_n$ gilt, wie aus den Ausdrücken für $x_2, \ldots x_n$ folgt, so ergibt sich der wichtige Satz:

> Die Funktion Θ, welche den gemeinsamen Nenner von $x_1, \ldots x_n$ bildet, ist eine ganze ganzzahlige Funktion der n^2 Elemente des Systemes
>
> $$(u_{gh}) = \left\{\begin{matrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots u_{2n} \\ \vdots & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots u_{nn} \end{matrix}\right\} = (V_1, V_2, \ldots V_n),$$
>
> und zwar ist sie eine homogene lineare Funktion der Elemente einer jeden Kolonne; sie kann also in der Form geschrieben werden
>
> $$u_{1h}U_1^{(h)} + \cdots + u_{nh}U_n^{(h)},$$
>
> wo die Koeffizienten $U_i^{(h)}$ die n Elemente von V_h nicht mehr enthalten.

Eine weitere Folgerung ist die, daß Θ keinen Zahlenfaktor besitzen kann, da denselben sonst jeder Zähler in (4) haben müßte; dann wären aber Zähler und Nenner nicht relativ prim zueinander.

Die Funktion Θ der n^2 Elemente (u_{gh}) ist im wesentlichen die Funktion, welche wir im folgenden die Determinante dieses Systemes nennen werden. Schon aus dem soeben abgeleiteten Satze ergibt sich, wie naturgemäß es ist, die n^2 Elemente u_{gh} in der soeben angegebenen Weise in ein nach n Zeilen und n Kolonnen angeordnetes System zu schreiben.

Wir wollen jetzt zunächst die Eigenschaften der so gefundenen Funktion $\Theta(u_{gh})$ aufsuchen und auf Grund derselben diese Funktion wirklich darstellen.

§ 6.

Im vorigen Abschnitte ist gezeigt worden, daſs die Funktion Θ in der Weise von den n^2 Elementen des Systemes

$$(1) \qquad (u_{gh}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

abhängt, daſs sie als homogene lineare Funktion der n Elemente einer Vertikalreihe dargestellt werden kann. Dieselbe Eigenschaft besitzt diese Funktion auch in Bezug auf die n Elemente einer jeden Horizontalreihe. Wir beweisen diesen Satz gleich in einem viel weiteren Umfange, indem wir den Nachweis führen, daſs sich die Funktion Θ in Bezug auf die Zeilen und Kolonnen ihres Elementensystemes vollständig gleich verhält.

Zu diesem Zwecke betrachten wir neben dem Elementensysteme (1) das sogenannte transponierte oder konjugierte, welches aus jenem entsteht, wenn man in ihm die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht, d. h. das System

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{21}, & \ldots & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{1n}, & u_{2n}, & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wir wollen dasselbe hier wie im folgenden bezeichnen durch

$$(2\text{a}) \qquad \begin{pmatrix} \bar{u}_{11}, & \bar{u}_{12}, & \ldots & \bar{u}_{1n} \\ \bar{u}_{21}, & \bar{u}_{22}, & \ldots & \bar{u}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{u}_{n1}, & \bar{u}_{n2}, & \ldots & \bar{u}_{nn} \end{pmatrix} = (\bar{u}_{gh}),$$

so daſs also für jedes Element $\bar{u}_{gh}$ des transponierten Systemes die Gleichung besteht

$$\bar{u}_{gh} = u_{hg}.$$

Man erkennt ohne weiteres, daſs das transponierte System des transponierten $\bar{u}_{gh}$ wieder das ursprüngliche ist, d. h. daſs

$$\overline{(\bar{u}_{gh})} = u_{gh}$$

ist.

Wir vergleichen nun die Werte derjenigen beiden Funktionen $\Theta(u_{gh})$ und $\Theta(\bar{u}_{gh})$, deren Elemente durch diese beiden Systeme gebildet werden, d. h. die beiden Funktionen

$$\Theta(u_{h1}, u_{h2}, \ldots u_{hn}) \quad \text{und} \quad \Theta(u_{1h}, u_{2h}, \ldots u_{nh})$$

miteinander. Dann kann man leicht zeigen, daſs dieselben sich höchstens durch ihr Vorzeichen unterscheiden können.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der im Anfange dieser Vorlesung auseinandergesetzten Auflösungsmethode der n Gleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \dots\ f_n = 0.$$

Multiplizieren wir nämlich ihre linken Seiten beziehlich mit n Gröſsen $y_1, y_2, \dots y_n$ und addieren sie dann, so ergibt sich die abgeleitete Gleichung

$$F = y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n = 0,$$

welche stets zugleich mit den ursprünglichen erfüllt ist.

Wir bestimmen nun wieder die Gröſsen $y_1, y_2, \dots y_n$ so, daſs die Koeffizienten von $x_2, x_3, \dots x_n$ in F alle Null sind, der von x_1 aber gleich -1 wird. Dazu müssen diese n Gröſsen die linearen Gleichungen befriedigen

$$(3)\qquad \begin{aligned} &y_1 u_{11} + y_2 u_{21} + \cdots + y_n u_{n1} = -1 \\ &y_1 u_{12} + y_2 u_{22} + \cdots + y_n u_{n2} = 0 \\ &\vdots \\ &y_1 u_{1n} + y_2 u_{2n} + \cdots + y_n u_{nn} = 0. \end{aligned}$$

Das Koeffizientensystem der $y_1, y_2, \dots y_n$ ist hier einfach das transponierte (2) zu (1) und da dasselbe aus lauter Unbestimmten besteht, so besitzen diese Gleichungen eine und nur eine Lösung, deren gemeinsamer Nenner gleich

$$\Theta(u_{1h},\ u_{2h}, \dots u_{nh}) = \Theta(\overline{u}_{gh})$$

ist. Es kann also gesetzt werden

$$y_k = \frac{Y_k(u_{gh})}{\Theta(\overline{u}_{gh})} \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

Substituiert man nun diese Werte der y_h in F, und berücksichtigt die linearen Gleichungen (3), so erhält man

$$F = (y_1 u_{10} + \cdots y_n u_{n0}) - x_1 = 0,$$

d. h. es ergibt sich der folgende Wert für x_1

$$x_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta(u_{gh})} = \frac{u_{10} Y_1 + \cdots + u_{n0} Y_n}{\Theta(\overline{u}_{gh})}.$$

Man erhält also für x_1 zwei verschiedene Brüche, deren Nenner $\Theta(u_{gh})$ und $\Theta(\overline{u}_{gh})$ sich nur dadurch unterscheiden, daſs das Elementensystem des zweiten das transponierte des ersten ist. Da aber der erste Bruch in der reduzierten Form gegeben ist, so muſs der zweite Nenner ein Vielfaches des ersten sein; man erhält also eine Gleichung,

$$\Theta(\bar{u}) = \Theta(u) P(u_{gh}),$$

wo P eine ganze ganzzahlige Funktion der n^2 Größen (u_{gh}) ist. Schreibt man aber in der Identität links und rechts an Stelle der Elemente ihre Transponierten, und beachtet, daß das transponierte System des transponierten wieder das ursprüngliche System ist, so ergibt sich

$$\Theta(u) = \Theta(\bar{u})\, P(\bar{u}_{gh}),$$

d. h. auch $\Theta(\bar{u})$ ist durch $\Theta(u)$ teilbar. Hieraus folgt also

$$\Theta(\bar{u}) = \pm\, \Theta(u), \tag{4}$$

d. h. es besteht der Satz:

> Die Funktionen Θ von zwei transponierten Elementensystemen können sich höchstens durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die folgende Überlegung zeigt aber auch hier genau wie auf S. 128 unten, daß in (4) das positive Vorzeichen zu wählen ist.

Setzt man nämlich

$$\Theta(\bar{u}_{gh}) = \varepsilon\, \Theta(u_{gh}),$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ sein muß, und ersetzt man das System (u_{gh}) durch irgend ein sogenanntes symmetrisches System (s_{gh}), dessen Vertikalreihen den entsprechenden Horizontalreihen gleich sind, so ist

$$(\bar{s}_{gh}) = (s_{gh}),$$

und es ergibt sich daher

$$\Theta(s_{gh}) = \varepsilon\, \Theta(s_{gh}).$$

Wäre also $\varepsilon = -1$, so müßte für jedes symmetrische System $\Theta(s_{gh}) = 0$ sein. Nun werden wir aber schon auf S. 288 zeigen, daß für das offenbar symmetrische sogenannte „Einheitssystem"

$$E = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, \ldots 0 \\ 0, & 1, & 0, \ldots 0 \\ 0, & 0, & 1, \ldots 0 \\ \vdots & & \\ 0, & 0, & 0, \ldots 1 \end{pmatrix}$$

$\Theta(E) = 1$, und also von Null verschieden ist. Also ist stets $\varepsilon = +1$, und es gilt der Satz:

> Die Funktion $\Theta(u_{gh})$ bleibt ungeändert, wenn man in ihrem Elementensysteme die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht. Jeder für die Vertikalreihen des Systemes (u_{gh}) bewiesene Satz gilt somit auch für seine Horizontalreihen.

Hieraus folgt sofort in Verbindung mit dem auf S. 277 bewiesenen Satze:

Die Funktion Θ ist linear und homogen in Bezug auf die Elemente jeder Zeile ihres Koeffizientensystemes

$$\begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots u_{1n} \\ \vdots & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \dots u_{nn} \end{pmatrix}$$

und sie verschwindet identisch, wenn die Elemente von irgend zwei Horizontalreihen einander gleich sind.

§ 7.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Eigenschaften die Funktion Θ in Bezug auf die Elemente von zwei beliebigen Zeilen oder Kolonnen besitzt. Wir geben zuerst noch einen neuen direkten Beweis dafür, daſs die Funktion $\Theta(u_{gh})$ verschwindet, wenn man die Elemente zweier Horizontalreihen H_i und H_k einander gleichsetzt. Aus den Untersuchungen des vorletzten Paragraphen hatte sich ergeben, daſs die Werte der durch die n Gleichungen

$$f_g = u_{g0} + \sum_h u_{gh} x_h = 0 \qquad (g=1,2,\dots n)$$

eindeutig bestimmten Unbekannten $x_1, x_2, \dots x_n$ die folgenden sind

$$x_h = -\frac{\Theta_h}{\Theta} \qquad (h=1,2,\dots n).$$

Es bestehen also die Identitäten

$$-u_{g0}\Theta + \Sigma u_{gh}\Theta_h \equiv 0 \qquad (g=1,2,\dots n).$$

Betrachtet man nur zwei unter diesen Gleichungen, etwa die i^{te} und die k^{te} und zieht diese voneinander ab, so ergibt sich die Gleichung

$$-(u_{i0}-u_{k0})\Theta + (u_{i1}-u_{k1})\Theta_1 + \dots + (u_{in}-u_{kn})\Theta_n \equiv 0.$$

In dieser Identität setzen wir nun

$$u_{i1} = u_{k1}, \dots u_{in} = u_{kn},$$

lassen aber u_{i0} und u_{k0} ganz unbestimmt. Dann fallen alle Summanden mit Ausnahme des ersten fort, und man erhält

$$(u_{i0}-u_{k0})\overline{\Theta}(u_{gh}) \equiv 0,$$

oder

$$\overline{\Theta}(u_{gh}) \equiv 0,$$

wenn man mit $\overline{\Theta}$ den Wert bezeichnet, welchen Θ annimmt, wenn man allgemein $u_{ih} = u_{kh}$ setzt.

Nun sind $u_{i1} \dots u_{in}$ und $u_{k1} \dots u_{kn}$ die Elemente der i^{ten} bez. k^{ten} Horizontalreihe des Elementensystemes von Θ, und man erhält also den Satz:

> Die Funktion $\Theta(u_{gh})$ verschwindet identisch, sobald die entsprechenden Elemente zweier beliebigen Zeilen H_i und H_k einander gleich sind.

In einer leicht verständlichen Schreibweise kann dieser Satz durch die Gleichung ausgedrückt werden

$$\Theta(\dots H_i = H_k \dots) \equiv 0. \tag{1}$$

Derselbe Satz gilt auch für je zwei Vertikalreihen von Θ, wie man wieder durch den Übergang zu dem transponierten Systeme erkennt; man erhält also die Gleichung

$$\Theta(\dots V_i = V_k \dots) \equiv 0.$$

Faßt man beide Sätze zusammen, so kann man sagen:

> Die Funktion Θ verschwindet identisch, sobald die entsprechenden Elemente zweier beliebigen Parallelreihen (Zeilen oder Kolonnen) einander gleich sind.

Hieraus folgt unmittelbar eine weitere Eigenschaft der Funktion Θ. Betrachtet man ein System, in dem jedes Element der i^{ten} Kolonne aus zwei Summanden besteht, d. h. ein System

$$\begin{pmatrix} u_{11} \dots (u_{1i} + u'_{1i}) \dots u_{1n} \\ \vdots \\ u_{n1} \dots (u_{ni} + u'_{ni}) \dots u_{nn} \end{pmatrix} = (V_1 \dots V_i + V'_i \dots V_n)$$

und entwickelt die Funktion Θ dieses Systemes nach den Elementen der i^{ten} Kolonne, so folgt aus dem Umstande, daß Θ in den Elementen derselben homogen und linear ist, die Gleichung

$$\Theta(u_{h1} \dots u_{hi} + u'_{hi} \dots u_{hn}) = \Theta(u_{h1} \dots u_{hi} \dots u_{hn}) + \Theta(u_{h1} \dots u'_{hi} \dots u_{hn}),$$

oder in einfacherer Schreibweise

$$\Theta(\dots V_i + V'_i \dots) = \Theta(\dots V_i \dots) + \Theta(\dots V'_i \dots).$$

Schreibt man in dieser Gleichung auch für die Elemente einer anderen Kolonne V_k, $V_k + V'_k$, d. h. setzt man allgemein für

$$u_{gk} \quad \text{beziehlich} \quad u_{gk} + u'_{gk} \qquad (g = 1, \dots n),$$

so ergibt sich aus ihr

$$\begin{aligned} \Theta(\dots V_i + V'_i \dots V_k + V'_k \dots) &= \Theta(\dots V_i \dots V_k + V'_k \dots) + \Theta(\dots V'_i \dots V_k + V'_k \dots) \\ &= \Theta(\dots V_i \dots V_k \dots) + \Theta(\dots V_i \dots V'_k \dots) + \Theta(\dots V'_i \dots V_k \dots) + \Theta(\dots V'_i \dots V'_k \dots). \end{aligned}$$

Diese Gleichung wenden wir an auf die Funktion

$$\Theta(\ldots V_i + V_k, \ldots, V_i + V_k \ldots),$$

welche, da die beiden Kolonnen einander gleich sind, identisch verschwindet. Daraus folgt

$$0 = \Theta(\ldots V_i + V_k \ldots V_i + V_k \ldots) = \Theta(\ldots V_i \ldots V_i \ldots) + \Theta(\ldots V_i \ldots V_k \ldots) + \Theta(\ldots V_k \ldots V_i \ldots) + \Theta(\ldots V_k \ldots V_k \ldots);$$

läßt man hier auf der rechten Seite diejenigen Funktionen fort, welche verschwinden, so ergibt sich

$$\Theta(\ldots V_i \ldots V_k \ldots) = -\Theta(\ldots V_k \ldots V_i \ldots),$$

und da sich die Funktion Θ in Bezug auf ihre Zeilen ganz ebenso verhält, wie in Bezug auf ihre Kolonnen, so ist auch

$$\Theta(\ldots H_i \ldots H_k \ldots) = -\Theta(\ldots H_k \ldots H_i \ldots).$$

Die Funktion Θ ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man die entsprechenden Elemente zweier beliebigen Parallelreihen (Zeilen oder Kolonnen) vertauscht.

Da die Funktion Θ homogen und linear in Bezug auf die Elemente einer beliebigen Zeile ist, so ergibt sich, wenn man die Elemente $u_{i1}, \ldots u_{in}$ der i^{ten} Zeile bezw. ersetzt durch $tu_{i1}, \ldots tu_{in}$, offenbar die Gleichung

$$\Theta\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ tu_{i1} & \ldots & tu_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = t\,\Theta(u_{i1}, \ldots u_{in}),$$

oder kürzer

$$\Theta(\ldots tH_i \ldots) = t\,\Theta(\ldots H_i \ldots)$$

und aus demselben Grunde folgt

$$\Theta(\ldots tV_i \ldots) = t\,\Theta(\ldots V_i \ldots).$$

Die Funktion Θ wird mit einer Größe t multipliziert, wenn man alle Elemente einer Reihe (Zeile oder Kolonne) mit t multipliziert.

Addieren wir zu den Elementen einer beliebigen Zeile H_i das t-fache der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile H_k, d. h. bilden wir

$$\Theta(\ldots H_i + tH_k \ldots),$$

so ergibt sich für dieses System

$$\begin{aligned} \Theta(\ldots H_i + tH_k \ldots H_k \ldots) &= \Theta(\ldots H_i \ldots H_k \ldots) + \Theta(\ldots tH_k \ldots H_k \ldots) \\ &= \Theta(\ldots H_i \ldots H_k \ldots) + t\,\Theta(\ldots H_k \ldots H_k \ldots) \\ &= \Theta(\ldots H_i \ldots H_k \ldots) \end{aligned}$$

und ganz ebenso folgt

$$\Theta(\ldots V_i + t V_k \ldots) = \Theta(\ldots V_i \ldots).$$

Die Funktion Θ bleibt also ungeändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein und dasselbe Vielfache der Elemente einer Parallelreihe addiert.

§ 8.

Ebenso wie in dem speziellen Falle der Systeme dritter Ordnung, besteht auch für die hier betrachtete Funktion von n^2 Elementen $\Theta(u_{gh})$ ein Multiplikationstheorem, durch welches der Wert dieser Funktion für ein sogenanntes „komponiertes" System von Elementen angegeben wird.

Ehe wir zum Beweise dieses Fundamentalsatzes übergehen, wollen wir zunächst den Begriff der Komposition für zwei Systeme von je n^2 Elementen kurz erörtern.

Sind zwei Systeme von je n^2 Elementen gegeben

$$\begin{pmatrix} w_{11}, & w_{12}, & \ldots & w_{1n} \\ w_{21}, & w_{22}, & \ldots & w_{2n} \\ \vdots \\ w_{n1}, & w_{n2}, & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots & u_{2n} \\ \vdots \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

oder kürzer geschrieben

$$(w_{gh}) \quad \text{und} \quad (u_{hi}) \qquad (g, h, i = 1, 2, \ldots n),$$

so wollen wir genau ebenso wie in den speziellen Fällen der Systeme von 4, 9 und 16 Elementen das System

$$(U_{gi}) \qquad (g, i = 1, \ldots n)$$

betrachten, dessen Elemente aus jenen beiden dadurch hervorgehen, dafs man die Elemente je einer Zeile von (w_{gh}) mit den entsprechenden Elementen je einer Kolonne von (u_{hi}) multipliziert und die so entstehenden n Produkte addiert. Es sind also die einzelnen Elemente U_{gi} gegeben durch die Gleichungen

$$U_{gi} = w_{g1} u_{1i} + w_{g2} u_{2i} + \cdots + w_{gn} u_{ni} \qquad (g, i = 1, 2, \ldots n),$$

oder kürzer

$$(1) \qquad U_{gi} = \sum_{h=1}^{n} w_{gh} u_{hi} \qquad (g, i = 1, 2, \ldots n).$$

Das so entstehende System wollen wir das aus (w_{gh}) und (u_{hi}) (in dieser Reihenfolge) komponierte System nennen, und diese Beziehung durch die Gleichung ausdrücken

$$(2) \qquad (w_{gh})(u_{hi}) = (U_{gi}).$$

Bezeichnet man zur Abkürzung mit $H_1, \ldots H_n$ die Horizontalreihen von (w_{gh}), mit $V_1', V_2', \ldots V_n'$ die Vertikalreihen des zweiten Systems (u_{hi}), so kann das komponierte System auch in diesem allgemeinen Falle kurz durch

$$(U_{gi}) = (H_g V_i') = \begin{pmatrix} H_1 V_1', & H_1 V_2', \ldots & H_1 V_n' \\ H_2 V_1', & H_2 V_2', \ldots & H_2 V_n' \\ \vdots & & \\ H_n V_1', & H_n V_2', \ldots & H_n V_n' \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden, wenn unter $H_g V_i'$ die Summe

$$w_{g1} u_{1i} + \cdots + w_{gn} u_{ni},$$

d. h. die Summe der Produkte der entsprechenden Elemente von H_g und V_i' verstanden wird.

Aus der Kompositionsvorschrift für die beiden Systeme geht unmittelbar hervor, dafs ein Element U_{gi} nur aus den Elementen der Zeile H_g des ersten und den Elementen der Kolonne V_i' des zweiten Systemes besteht, dafs also etwa in der g^{ten} Zeile von (U_{gk}) nur diejenigen Elemente von (w_{gh}) vorkommen, welche dort ebenfalls in der Zeile H_g stehen.

Wir werden gleich zeigen, dafs gerade diese und nur diese Art der Komposition der Systeme in der Theorie der linearen Gleichungen von grundlegender Bedeutung ist.

Zunächst soll aber noch eine Erweiterung des Begriffes der Komposition gegeben werden, welche im folgenden gebraucht wird. Komponiert man nämlich genau in der soeben angegebenen Weise das vorige System (w_{gh}) mit dem rechteckigen Systeme

$$\text{(2a)} \qquad (u_{h0}, u_{h1}, \ldots u_{hn}) = (u_{hk}) \qquad \binom{g, h = 1, 2, \ldots n}{k = 0, 1, 2, \ldots n},$$

welches aufser den Kolonnen $V_1' \ldots V'$ noch die Kolonne V_0' enthält, so erhält man als Kompositionsresultat wieder eine rechteckige Matrix

$$(U_{gk}) = (H_g V_k') \qquad \binom{g = 1, 2, \ldots n}{k = 0, 1, 2, \ldots n}$$

von n Zeilen und $(n+1)$ Kolonnen, wo auch jetzt

$$U_{gk} = w_{g1} u_{1k} + \cdots + w_{gn} u_{nk} = H_g V_k',$$

oder einfacher

$$U_{gk} = \sum_{h=1}^{n} w_{gh} u_{hk} \qquad \binom{g = 1, 2, \ldots n}{k = 0, 1, 2, \ldots n}$$

ist. Auch diese Matrix wollen wir als das Resultat der Komposition von (w_{gh}) und der Matrix (u_{gk}) in (2a) betrachten und ihren Zusammenhang mit jenen beiden Systemen ebenfalls durch die Gleichung

(2b) $$(w_{gh})(u_{gk}) = (U_{gk}) \qquad \binom{g, h = 1, 2, \ldots n}{k = 0, 1, 2, \ldots n}$$

charakterisieren.

Wir gehen nun aus von dem Gleichungssysteme

(3) $$f_g = u_{g0} + \Sigma u_{gh} x_h = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots n),$$

dessen einzige Lösung für unbestimmte u_{gh} wir in der Form schreiben konnten

(3a) $$x_h = -\frac{\Theta_h(u_{gi})}{\Theta(u_{gi})} \qquad (h = 1, 2, \ldots n).$$

Leiten wir nun aus (3) ein neues Gleichungssystem

(4) $$\begin{aligned} F_1 &= w_{11} f_1 + \cdots + w_{1n} f_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n &= w_{1n} f_1 + \cdots + w_{nn} f_n = 0, \end{aligned}$$

oder einfacher

$$F_g = \sum_h w_{gh} f_h = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots n)$$

ab, so erkennt man ohne weiteres, daſs diese Gleichungen durch die soeben angegebene Lösung (3a) des Gleichungssystemes $f_i = 0$ befriedigt werden. Bedeuten aber die Elemente (w_{gh}) unbestimmte Variable, so besitzt das zweite System auch nur diese Lösung, da die n homogenen linearen Funktionen (4) von $f_1, \ldots f_n$ nach dem Korollar am Schlusse des § 2 nur dann sämtlich verschwinden können, wenn $f_1, \ldots f_n$ selbst gleich Null sind. Es besitzen also die n Gleichungen $f_i = 0$ und die anderen $F_i = 0$ dieselbe Lösung; sie sind demnach absolut äquivalent.

Ordnet man nun diese n Funktionen $F_1, \ldots F_n$ in (4) nach $x_1, \ldots x_n$, und ist dann

(4a) $$F_g = U_{g0} + \sum_i U_{gi} x_i = 0,$$

so erkennt man ohne weiteres, daſs das neue Koeffizientensystem

$$(U_{gh}) \qquad \binom{g = 1, \ldots n}{k = 0, 1, \ldots n}$$

aus dem ursprünglichen

$$(u_{hk}) \qquad \binom{h = 1, \ldots n}{k = 0, 1, \ldots n}$$

dadurch hervorgeht, daſs man es vorn mit dem quadratischen Systeme

$$(w_{hg}) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots n)$$

komponiert; d. h. es besteht die Kompositionsgleichung

$$(w_{gh})(u_{hk}) = (U_{gk}) \qquad \binom{g, h = 1, 2, \ldots n}{k = 0, 1, 2, \ldots n}.$$

Löst man nun das Gleichungssystem (4a) direkt auf, so ergibt sich die Lösung aus der in (3a) gefundenen dadurch, daſs man die Elemente u_{gk} ersetzt durch die entsprechenden U_{gk}, d. h. man erhält nun

$$x_h = -\frac{\Theta_h(U_{gi})}{\Theta(U_{gi})} \qquad (h=1,2,\dots n);$$

und da diese Werte von $x_1, \dots x_n$ mit den in (3a) gefundenen übereinstimmen müssen, so erhält man die Identität

$$\frac{\Theta_h(U_{gi})}{\Theta(U_{gi})} = \frac{\Theta_h(u_{gi})}{\Theta(u_{gi})} \qquad (h=1,2,\dots n),$$

und hieraus folgt die Proportion

$$\frac{\Theta(U)}{\Theta(u)} = \frac{\Theta_1(U)}{\Theta_1(u)} = \dots = \frac{\Theta_n(U)}{\Theta_n(u)}. \tag{5}$$

In diesem Ausdrucke enthält der erste Quotient kein Element $u_{10}, u_{20}, \dots u_{n0}$ der Kolonne V_0, denn der Nenner desselben enthält nur die Elemente $(u_{h1}, u_{h2}, \dots u_{hn})$, der Zähler nur $(U_{h1}, U_{h2}, \dots U_{hn})$, und da die Elemente u_{h0} nur in den U_{h0} auftreten, so kommen sie in diesem ersten Quotienten nicht vor.

Ebenso zeigt man, daſs der zweite Quotient von den in V_1 befindlichen Elementen (u_{h1}) nicht abhängig ist u. s. w., und hieraus folgt, daſs der gemeinsame Wert dieser $(n+1)$ Quotienten von den Elementen des ganzen Systemes (u_{gk}) nicht abhängt. Zur Ermittelung des Wertes von

$$\frac{\Theta(U_{gk})}{\Theta(u_{gk})}$$

kann man also für das System (u_{gk}) irgend ein spezielles annehmen. Es ist nun (U_{gk}) das aus (w_{gh}) und (u_{hk}) komponierte System, d. h. es ist

$$\begin{pmatrix} w_{11}, & w_{12}, & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & & \\ w_{n1}, & w_{n2}, & \dots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}, & \dots & U_{1n} \\ \vdots & & \\ U_{n1}, & \dots & U_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Wählt man nun für das System $(u_{h1} \dots u_{hn})$ speziell das oben (S. 280) angeführte Einheitssystem E und beachtet, daſs dann

$$\begin{pmatrix} w_{11}, & \dots & w_{n1} \\ \vdots & & \\ w_{n1}, & \dots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}, & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \\ w_{n1}, & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

d. h., daſs dann $(U_{gh}) = (w_{gh})$ wird, so folgt aus der obigen Bemerkung, daſs der Wert von

$$\frac{\Theta(U_{gh})}{\Theta(u_{gh})} = \frac{\Theta(w_{gh})}{\Theta(E)}$$

wird.

In dieser Gleichung sind nun nach der allgemeinen Voraussetzung $\Theta(u_{gh})$ und $\Theta(w_{gh})$ nicht identisch Null, es kann daher auch nicht $\Theta(E)$ gleich Null sein. Aus der hieraus sich ergebenden Gleichung

$$\Theta(U_{gh})\cdot\Theta(E)=\Theta(u_{gh})\,\Theta(w_{gh}) \tag{8}$$

folgt nun weiter, daſs die ganze nicht verschwindende Zahl $\Theta(E)$ gleich ± 1 sein muſs; denn hätte $\Theta(E)$ einen von 1 verschiedenen Primfaktor, so würde dieser in $\Theta(u)$ oder $\Theta(w)$ enthalten sein, und das stände mit dem oben gefundenen Resultat im Widerspruch, daſs die Funktion Θ keine Zahlenfaktoren enthält. Es ist also $\Theta(E)=\pm 1$; und da das Vorzeichen von Θ bis jetzt noch willkürlich war, so wollen wir dasselbe jetzt ein für alle Male so gewählt annehmen, daſs

$$\Theta(E)=\Theta\begin{Bmatrix}1, & 0, & 0, \dots 0\\ 0, & 1, & 0, \dots 0\\ 0, & 0, & 1, \dots 0\\ \vdots & & \\ 0, & 0, & 0, \dots 1\end{Bmatrix}=+1 \tag{9}$$

ist. Da nun das System $(U_{h1},\dots U_{hn})$ aus den beiden $(w_{h1},\dots w_{hn})$ und $(u_{h1},\dots u_{hn})$ komponiert ist, so ergibt sich also aus (8) die folgende wichtige Gleichung

$$\Theta[(w_{gh})(u_{gh})]=\Theta(w_{gh})\,\Theta(u_{gh}) \qquad (g,h=1,2,\dots n), \tag{10}$$

d. h. die Funktion Θ von einem komponierten Elementarsysteme ist gleich dem Produkte der Θ-Funktionen von ihren Komponenten.

An dieser Stelle mag auch bemerkt werden, daſs durch die Gleichung (9) der auf S. 280 anticipierte Nachweis erbracht ist, daſs $\Theta(E)$ notwendig von Null verschieden ist.

§ 9.

Das im vorigen Abschnitte bewiesene Multiplikationstheorem für Θ erhält man auch, wenn man, anstatt das Gleichungssystem

$$f_h=u_{h0}+\sum_i u_{hi}x_i=0 \tag{1}$$

durch ein äquivalentes zu ersetzen, an Stelle der n Unbekannten $x_1,\dots x_n$ n andere $\xi_1,\dots\xi_n$ einführt, welche mit jenen durch die linearen Gleichungen

$$x_i=\sum_k v_{ik}\xi_k \tag{2}$$

zusammenhängen, wo die n^2 Koeffizienten des Substitutionssystemes

(3) $$(v_{ik})$$

unbestimmte Größen bedeuten. Setzt man nämlich die Werte für $x_1, \ldots x_n$ in die Gleichungen (1) ein und ordnet diese dann nach den neuen Unbekannten $\xi_1, \ldots \xi_n$, so erhält man n Gleichungen für sie, welche folgendermaßen geschrieben werden können

(4) $$\varphi_h = u_{h0} + \sum_i \sum_k u_{hi} v_{ik} \xi_k = u_{h0} + \sum_k V_{hk} \xi_k = 0.$$

In ihnen bleiben die n konstanten Glieder dieselben wie vorher, während die n^2 Koeffizienten V_{hk} durch die Gleichungen bestimmt sind

$$V_{hk} = \sum_{i=1}^{n} u_{hi} v_{ik} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n);$$

diese zeigen, daß das System (V_{hk}) aus den beiden (u_{hi}) und (v_{ik}) durch Komposition entsteht, d. h. daß

(5) $$(u_{hi})(v_{ik}) = (V_{hk}) \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ist.

Die Gleichungen (4) für $\xi_1, \ldots \xi_n$ besitzen nun eine und nur eine Lösung; denn aus (2) ergibt sich, daß, solange das Koeffizientensystem (v_{hi}) lauter unbestimmte Größen enthält, dem einen Lösungssystem $x_1, \ldots x_n$ der Gleichungen (1) eines und nur eines für $\xi_1, \ldots \xi_n$ entspricht. Löst man nun die Gleichungen (4) für diese Unbekannten direkt auf, so können nach unserem allgemeinen Satze die Werte der Unbekannten in der Form geschrieben werden

(6) $$\xi_\varkappa = -\frac{\Theta_\varkappa(V_{hk})}{\Theta(V_{hk})} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

wo also der gemeinsame Nenner die Θ-Funktion des Systems (V_{hk}) in (5) bedeutet.

Setzt man nun diese Werte in die Gleichungen (2) ein und ersetzt zugleich die Unbekannten x_i durch ihre Werte

$$-\frac{\Theta_i(u_{hk})}{\Theta(u_{hk})},$$

so ergibt sich die Identität

(7) $$-x_i = \frac{\Theta_i(u_{hk})}{\Theta(u_{hk})} = \frac{\Sigma v_{i\varkappa} \Theta_\varkappa(V_{hk})}{\Theta(V_{hk})}.$$

Da nun die linke Seite dieser Gleichung den Wert der Unbekannten x_i in der reduzierten Form gibt, so muß der Nenner der rechten Seite $\Theta(V)$ durch $\Theta(u)$ teilbar sein, d. h. es muß eine Gleichung von der folgenden Form bestehen

$$\Theta(V_{hk}) = \Theta(u_{hk}) \cdot G(u_{hk}, v_{hk}),$$

oder mit Berücksichtigung von (5)

$$\Theta[(u_{hi})(v_{ik})] = \Theta(u_{hi}) \cdot G(u_{hi}, v_{ik}), \tag{8}$$

wo G eine noch unbekannte ganze ganzzahlige Funktion ihrer Argumente ist.

Nun ist aber $\Theta(u_{hk})$ eine ganze homogene Funktion der Gröſsen (u_{hk}) von der n^{ten} Dimension; dasselbe gilt von $\Theta(V_{hk})$ in Bezug auf die Elemente (V_{hk}), und da jedes derselben homogen und linear ist in den Elementen des Systemes (u_{hk}), so folgt daraus, daſs die beiden ganzen Funktionen $\Theta(V)$ und $\Theta(u)$ die Elemente (u_{hk}) in derselben, nämlich der n^{ten} Dimension enthalten. Daher kann die ganze Funktion G die Gröſsen (u_{hk}) gar nicht enthalten; sie ist also allein von den Elementen v_{hk} abhängig.

Um den noch unbekannten Faktor G zu finden, können wir also an Stelle des Systemes (u_{gi}) ein ganz beliebiges spezielles, z. B. das Einheitssystem, wählen. Tun wir dieses und beachten wieder, daſs

$$(E)(v_{ik}) = (v_{ik})$$

wird, so geht unsere Gleichung (8) über in

$$\Theta(v_{ik}) = \Theta(E) \cdot G(v_{ik}).$$

Auch aus dieser Gleichung ergibt sich, daſs $\Theta(E)$ eine von Null verschiedene ganze Zahl sein muſs, welche keinen Primteiler enthält, daſs also $\Theta(E)$ gleich ± 1 ist. Setzen wir also nach der oben gemachten Bestimmung

$$\Theta(E) = +1,$$

so wird

$$G(v_{ik}) = \Theta(v_{ik}),$$

und aus der Gleichung (8) ergibt sich, wie oben, der Multiplikationssatz

$$\Theta[(u_{hi})(v_{ik})] = \Theta(u_{hi}) \cdot \Theta(v_{ik}). \tag{9}$$

Das hier gefundene Multiplikationstheorem (9) bildet die Grundlage für alle Untersuchungen über die Funktionen $\Theta(u_{hi})$ der n^2 Elemente (u_{hi}), oder, was dasselbe ist, über die Determinanten n^{ter} Ordnung. Wir werden nämlich zeigen, daſs sich alle Eigenschaften der Funktion Θ, auch die vorher direkt hergeleiteten, als sehr einfache Korollare aus diesem Satze ergeben. Vorher soll aber die Funktion Θ auf Grund ihrer jetzt gefundenen Eigenschaften explicite dargestellt und nachgewiesen werden, daſs durch sie in der Tat ein System von n Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten gelöst wird.

Siebzehnte Vorlesung.

Darstellung der Determinante mit Hilfe ihrer drei charakteristischen Eigenschaften. — Beweis, dafs n lineare Gleichungen mit n Unbekannten stets eine Lösung besitzen. — Die verschiedenen Darstellungen der Vorzeichen $\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$. — Die *Cauchy*sche Determinante.

§ 1.

Die bis jetzt hergeleiteten Eigenschaften der Funktion Θ genügen vollständig, um dieselbe explicite hinzuschreiben und um den Nachweis zu führen, dafs in der Tat jedes System von n linearen Gleichungen für ebensoviele Unbekannte mit unbestimmten Koeffizienten stets eine Lösung besitzt.

Wir hatten gefunden, dafs, falls n solche Gleichungen

$$(1) \qquad f_g = u_{g0} + \Sigma u_{gh} x_h = 0 \qquad (g = 1, 2, \ldots n)$$

durch Gröfsen des Rationalitätsbereiches der Koeffizienten lösbar sind, der gemeinsame Nenner $\Theta(u_{gh})$ eine ganze ganzzahlige Funktion der n^2 Elemente des Systemes

$$(2) \qquad (u_{gh}) = \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

sein wird, welche jene ganze Reihe von Eigenschaften besitzen mufs, die in der voraufgehenden Vorlesung angegeben worden sind. Von ihnen wollen wir hier nur drei hervorheben, durch welche die Funktion Θ eindeutig bestimmt ist, und mit deren Hilfe sie leicht dargestellt werden kann.

Dieselben sind in dem folgenden Ausspruche zusammengefafst:

> Die Funktion $\Theta(u_{gh})$ mufs eine ganze ganzzahlige Funktion der n^2 Gröfsen (u_{gh}) sein, welche die folgenden Eigenschaften hat:
>
> 1. Sie ist homogen und linear in den Elementen einer jeden Horizontalreihe des Systemes;
> 2. sie ändert nur ihr Zeichen, wenn man zwei Zeilen miteinander vertauscht;

3. es ist $\Theta(E) = 1$, wenn mit E das Einheitssystem bezeichnet wird.

Da die Funktion $\Theta(u_{gh})$ eine ganze ganzzahlige Funktion der n^2 Elemente des Systemes ist, so ist sie eine Summe von lauter Produkten von Potenzen jener n^2 Elemente mit ganzzahligen Koeffizienten. Weil aber Θ eine homogene lineare Funktion zunächst der Elemente

$$u_{11}, u_{12}, \ldots u_{1n}$$

der ersten Zeile des Systemes (u_{gh}) ist, so enthält jedes dieser Produkte ein und nur ein Element u_{1h_1} von H_1 und da dasselbe auch in Bezug auf alle übrigen Zeilen gilt, so muſs Θ die Form haben

$$\Theta(u_{gh}) = \sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2=1}^{n}\cdots\sum_{h_n=1}^{n}\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n} u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n}, \tag{3}$$

wo jetzt nur noch die Koeffizienten $\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$ zu bestimmen sind.

Um diese Gröſsen zu finden, vertauschen wir in dem Elementensystem (u_{gh}) in (2) die erste und zweite Horizontalreihe, und beachten, daſs dabei $\Theta(u_{gh})$ nur sein Vorzeichen ändert. Dann folgt aus (3)

$$-\Theta(u_{gh}) = \sum_{h_i=1}^{n}\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n} u_{2h_1} u_{1h_2} u_{3h_3} \ldots u_{nh_n},$$

oder wenn wir die Summationsbuchstaben h_1 und h_2 miteinander vertauschen, wodurch ja allein ihr Name geändert wird, so erhält man die zweite Darstellung von Θ

$$+\Theta(u_{gh}) = -\sum \varepsilon_{h_2 h_1 h_3 \ldots h_n} u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n}. \tag{3a}$$

Durch Subtraktion dieses letzten Wertes von Θ von dem in (3) angegebenen erhält man die folgende Identität, welche für variable Werte der n^2 Elemente (u_{gh}) erfüllt sein muſs

$$\sum(\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n} + \varepsilon_{h_2 h_1 \ldots h_n}) u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n} = 0.$$

Da hier alle Koeffizienten gleich Null sein müssen, so ergibt sich

$$\varepsilon_{h_1 h_2 h_3 \ldots h_n} = -\varepsilon_{h_2 h_1 h_3 \ldots h_n} \qquad \text{für } h_1 \gtrless h_2 \tag{4}$$

$$\varepsilon_{h_1 h_1 h_3 \ldots h_n} = 0. \tag{4a}$$

Genau ebenso folgen aber, wenn man die Elemente zweier beliebiger Zeilen H_α und H_β vertauscht, die Gleichungen

$$\varepsilon_{\ldots h_\alpha \ldots h_\beta \ldots} = -\varepsilon_{\ldots h_\beta \ldots h_\alpha \ldots}$$

und speziell

$$\varepsilon_{\ldots h_\alpha \ldots h_\alpha \ldots} = 0.$$

Demnach sind alle Koeffizienten $\varepsilon_{h_1 \ldots h_n}$ gleich Null, in welchen zwei Indizes h_α einander gleich sind, wo also in dem zugehörigen Produkte $u_{1h_1} \ldots u_{\alpha h_\alpha} \ldots u_{\beta h_\alpha} \ldots$ zwei Elemente in einer und derselben Kolonne V_{h_α} stehen. Es sind daher nur diejenigen Koeffizienten

$$\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$$

nicht gleich Null, in welchen die n Indizes $h_1, \ldots h_n$ alle voneinander verschieden sind; und da dieselben nur die Werte $1, 2, \ldots n$ durchlaufen, so können nur diejenigen $n!$ Koeffizienten $\varepsilon_{h_1 \ldots h_n}$ wirklich auftreten, in welchen die Indizes $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ einer Permutation der n Zahlen $(1, 2, \ldots n)$ entsprechen.

Aus (4) folgt nun weiter, daſs diese $n!$ ganzzahligen Koeffizienten ihren absoluten Werten nach gleich sein müssen, sich also höchstens durch ihr Vorzeichen unterscheiden können, weil man ja jede Permutation $h_1, h_2, \ldots h_n$ aus $1, 2, \ldots n$ durch successive Permutationen von je zwei Elementen erhalten kann.

Der absolute Wert dieser Koeffizienten bestimmt sich nun leicht aus der dritten Eigenschaft der Θ-Funktion. Hierzu beachten wir, daſs die Entwickelung von Θ folgendermaſsen anfängt

$$\Theta = \varepsilon_{12 \ldots n} u_{11} u_{22} \ldots u_{nn} + \cdots;$$

setzen wir nun $(u_{hk}) = (E)$, d. h.

$$u_{11} = u_{22} = \cdots = u_{nn} = 1, \quad u_{ik} = 0 \qquad (i \gtrless k)$$

und berücksichtigen, daſs dann $\Theta(E) = +1$ werden soll, so folgt

$$\varepsilon_{12 \ldots n} = +1; \tag{5}$$

die übrigen Koeffizienten $\varepsilon_{h_1 \ldots h_n}$ müssen also nach (4) sämtlich die Werte ± 1 oder Null haben.

Hiernach sind die Koeffizienten $\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$ durch die folgenden beiden Eigenschaften bestimmt:

1. $\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$ ändert nur sein Vorzeichen, wenn man zwei seiner Indizes vertauscht; es verschwindet also, wenn irgend zwei seiner Indizes einander gleich sind.
2. $\varepsilon_{12 \ldots n} = +1$.

Ist es möglich, die Gröſsen ε so zu bestimmen, so existiert eine Funktion $\Theta(u_{gh})$ von n^2 Elementen, welche die oben angegebenen drei Eigenschaften besitzt, im anderen Falle nicht.

Wir beweisen nun sehr leicht, daſs es stets möglich ist, die Gröſsen $\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$ diesen beiden Bedingungen gemäſs zu bestimmen. Zu diesem Zwecke nehmen wir für den Augenblick $h_1, \ldots h_n$ als n Ver-

änderliche an und suchen eine ganze Funktion $G(h_1, h_2, \dots h_n)$ von $h_1, \dots h_n$ so zu bestimmen, daſs sie verschwindet, sobald zwei der Variablen h_α und h_β einander gleich werden. Betrachtet man G zunächst als Funktion von h_n allein, so muſs sie für $h_n = h_1, \dots h_n = h_{n-1}$ verschwinden, also durch die $n-1$ Linearfaktoren

$$(h_n - h_1), \dots \quad (h_n - h_{n-1})$$

teilbar sein; demnach ist

$$G(h_1, \dots h_n) = (h_n - h_{n-1}) \dots (h_n - h_1)\, G_1(h_1, \dots h_n),$$

wo G_1 eine neue ganze Funktion von $h_1, h_2, \dots h_n$ bedeutet.

Da die Funktion G, also auch G_1, als Funktion von h_{n-1} betrachtet, verschwinden muſs, sobald h_{n-1} einen der Werte $h_1, h_2, \dots h_{n-2}$ annimmt, so enthält G weiter das Produkt

$$(h_{n-1} - h_1) \dots (h_{n-1} - h_{n-2}).$$

Fährt man in derselben Weise fort, so ergibt sich für $G(h_1, h_2, \dots h_n)$ die folgende Darstellung

$$G(h_1, h_2, \dots h_n) = \prod_{g > k} (h_g - h_k) \cdot S(h_1, h_2, \dots h_n), \tag{5}$$

wo S eine noch zu bestimmende ganze Funktion von $h_1, h_2, \dots h_n$ ist.

Nun kann man zeigen, daſs das Produkt

$$\Pi(h_g - h_k) = [h_1, h_2, \dots h_n] \qquad g > k$$

auch die weitere Eigenschaft hat, daſs es sein Zeichen ändert, sobald zwei der Variablen h_α und h_β miteinander vertauscht werden. Jene Funktion ist nämlich, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem Produkte aller Differenzen der n Gröſsen $h_1, \dots h_n$ jede ein Mal genommen. Es besteht also die Gleichung

$$[\dots h_\alpha \dots h_\beta \dots] = \varepsilon (h_\alpha - h_\beta) \cdot \prod_{r \gtrless \alpha, \beta} [(h_\alpha - h_r)(h_\beta - h_r)] \cdot \prod_{r, s \gtrless \alpha, \beta} (h_r - h_s),$$

wo ε einen der Werte ± 1 hat, und wo jedesmal r und s unabhängig voneinander alle von α und β verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2, \dots n$ durchlaufen. Vertauscht man nun h_α mit h_β, so ändert die erste Differenz ihr Zeichen, in dem folgenden Produkte vertauschen sich nur die Faktoren $(h_\alpha - h_r)$ und $(h_\beta - h_r)$, während das letzte ungeändert bleibt. Es ändert also das in (5) stehende Produkt bei der Vertauschung zweier beliebigen Variablen h_α und h_β nur sein Vorzeichen. Daher muſs die Funktion $S(h_1, \dots h_n)$ in (5) bei jeder derartigen Vertauschung ungeändert bleiben; sie ist also eine sogenannte symmetrische Funktion der n Gröſsen $h_1, h_2, \dots h_n$.

Setzt man also jetzt wieder für die Variablen $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ irgend eine Permutation der n Zahlen $1, 2 \ldots n$, so folgt aus dieser Eigenschaft von $S(h_1, h_2, \ldots h_n)$, daß

$$S(h_1, h_2, \ldots h_n) = S(1, 2, \ldots n) = C$$

ist, und die Gleichung (5) geht also über in

$$G(h_1, \ldots h_n) = C \cdot \Pi(h_g - h_k) \qquad (g > k).$$

Ersetzt man endlich hier die Permutation $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ durch $(1, 2, \ldots n)$, setzt man also $h_i = i$ und beachtet, daß alsdann $G(1, 2, \ldots n) = 1$ werden soll, so ergibt sich schließlich

$$C = \frac{1}{\Pi(g-k)},$$

und wir erhalten so die folgende Darstellung für $\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$

$$\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n} = \prod_{g>k} \left(\frac{h_g - h_k}{g-k}\right) \qquad (g, k = 1, 2, \ldots n). \tag{6}$$

Da diese Zahlen den für $\varepsilon_{h_1 h_2 \ldots h_n}$ aufgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen 1 und 2 genügen, so besitzt die aus ihnen gebildete ganze ganzzahlige Funktion

$$\sum_{h_i=1}^{n} \prod_{g>k} \left(\frac{h_g - h_k}{g-k}\right) u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n} \tag{7}$$

die drei oben geforderten Eigenschaften, nämlich

1. sie ist linear und homogen für die Elemente jeder Zeile von (u_{gh});
2. sie ändert ihr Zeichen bei Vertauschung zweier Zeilen;
3. sie reduziert sich auf 1, sobald (u_{gh}) gleich dem Einheitssysteme E angenommen wird.

Die auf diese Weise bestimmte Funktion (7), welche also die soeben angegebenen für $\Theta(u_{gh})$ notwendigen Eigenschaften besitzt, soll nun die Determinante der n^2 Elemente (u_{gh}) genannt und durch

$$|u_{gh}|$$

oder ausgeschrieben durch

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden.

§ 2.

Bei der Untersuchung der Systeme von n linearen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten waren wir von der grundlegenden Voraussetzung ausgegangen, daſs denselben durch rationale Funktionen der Gleichungskoeffizienten genügt werden könne. Die genauere Untersuchung der Form jener Lösungen hatte nun im vorigen Abschnitte zu völlig bestimmten ganzen ganzzahligen Funktionen der Koeffizienten geführt, welche wir Determinanten nannten und die wir ausgehend von ihren auf S. 291 angegebenen charakteristischen Eigenschaften explicite darzustellen imstande waren.

Wir wollen nun unter Benutzung jener drei charakteristischen Eigenschaften der Determinanten den Nachweis führen, daſs in der Tat jedes System

$$f_h = u_{h0} + u_{h1}\,x_1 + \cdots + u_{hn}\,x_n = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

von n linearen Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten für unbestimmte Werte der Koeffizienten durch rationale Funktionen derselben befriedigt werden kann; wir wollen jetzt also die Richtigkeit der Voraussetzung beweisen, welche wir unserer ganzen Untersuchung zu Grunde legten.

Zu diesem Zwecke betrachten wir diejenige Determinante der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung

$$U = \begin{vmatrix} u_{00}, & u_{01}, & \ldots & u_{0n} \\ u_{10}, & u_{11}, & \ldots & u_{1n} \\ \vdots & & & \\ u_{n0}, & u_{n1}, & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix} = |u_{ik}| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots n), \tag{2}$$

deren Elementensystem aus dem Koeffizientensystem der Gleichungen (1) durch Hinzufügung einer ersten Zeile H_0 mit den $(n+1)$ Elementen

$$u_{00}, u_{01}, \ldots u_{0n}$$

von Unbestimmten hervorgeht. Aus den Resultaten des letzten Abschnittes geht hervor, daſs dieselbe stets explicite hingeschrieben werden kann. Nach der ersten auf S. 295 angegebenen Fundamentaleigenschaft ist diese Determinante eine ganze ganzzahlige Funktion der $(n+1)^2$ Elemente (u_{ik}), welche homogen und linear ist in den Elementen $u_{00}, u_{01}, \ldots u_{0n}$; d. h. es besteht eine Gleichung

$$U = u_{00}\,U_0 + u_{01}\,U_1 + \cdots + u_{0n}\,U_n, \tag{3}$$

in der die Koeffizienten

$$U_0, U_1, \ldots U_n$$

ganze ganzzahlige Funktionen der $n(n+1)$ Elemente der Matrix

$$\left(\begin{array}{l} u_{10}, u_{11}, \ldots u_{1n} \\ \vdots \\ u_{n0}, u_{n1}, \ldots u_{nn} \end{array}\right) \tag{4}$$

sind. Die Funktion U_0, welche den Koeffizienten von u_{00} bildet, ist nicht identisch Null; denn wäre dies der Fall, so würde die Determinante ja von u_{00} ganz unabhängig sein, während ihre Entwickelung doch nach der der dritten Eigenschaft mit dem Diagonalgliede

$$+ u_{00} u_{11} \ldots u_{nn}$$

anfängt.

Nach der zweiten Fundamentaleigenschaft verschwindet die Determinante $|u_{ik}|$ identisch, sobald für die Elemente der ersten Zeile H_0 die entsprechenden Elemente irgend einer anderen Zeile H_i gesetzt werden. Setzt man also in der Gleichung (3) allgemein $H_0 = H_i$, oder

$$u_{0k} = u_{ik} \qquad (k = 0, 1, \ldots n),$$

so erhält man die folgenden n Identitäten

$$u_{h0} U_0 + u_{h1} U_1 + \cdots + u_{hn} U_n \equiv 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

oder, wenn man durch die nicht verschwindende Gröfse U_0 dividiert, so ergibt sich

$$u_{h0} + u_{h1} \frac{U_1}{U_0} + \cdots + u_{hn} \frac{U_n}{U_0} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots n). \tag{5}$$

Diese Identitäten lehren, dafs die Gleichungen $f_h = 0$ in (1) befriedigt werden, wenn man für die n Unbekannten $x_1, \ldots x_n$ die folgenden rationalen Funktionen der Gröfsen u_{ik} mit ganzzahligen Koeffizienten setzt

$$x_1 = \frac{U_1}{U_0}, \quad x_2 = \frac{U_2}{U_0}, \ldots, \quad x_n = \frac{U_n}{U_0};$$

und damit ist die von uns zu Grunde gelegte Voraussetzung vollständig bewiesen.

In der sechzehnten Vorlesung war nun gezeigt worden, dafs, falls das Gleichungssystem (1) eine rationale Lösung besitzt, der gemeinsame Nenner der Unbekannten $x_1, \ldots x_n$ in der reduzierten Form eine ganze Reihe von Eigenschaften besitzt, welche am angeführten Orte mit Leichtigkeit abgeleitet werden konnten.

Im § 1 dieser Vorlesung hatten wir dann gesehen, dafs, falls jener Nenner überhaupt existiert, er mit der Determinante

$$(6) \qquad |u_{gh}| = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} \qquad (g, h = 1, 2, \dots n)$$

der n^2 Gleichungskoeffizienten übereinstimmen mufs, welche wir in der Form

$$(6a) \qquad \sum_{h_i} \prod_{g>k} \frac{h_g - h_k}{g - k} \cdot u_{1h_1} u_{2h_2} \dots u_{nh_n}$$

explicite darstellen können.

Da wir jetzt nachgewiesen haben, dafs das Gleichungssystem (1) wirklich eine rationale Lösung besitzt, so folgt endlich, dafs der gemeinsame Nenner der Unbekannten $x_1, \dots x_n$ die Determinante $|u_{gh}|$ ist, und dafs diese alle diejenigen Eigenschaften besitzt, welche wir in der vorigen Vorlesung für die Funktion $\Theta(u_{gh})$ bewiesen hatten.

Wir wollen nunmehr diese früher gefundenen Eigenschaften der Determinante hier noch einmal kurz zusammenstellen.

Die in (6) gebildete Determinante $|u_{gh}|$ aus den n^2 Elementen des Systems (u_{gh}) ist eine ganze ganzzahlige Funktion derselben, welche die folgenden Eigenschaften hat:

1. Sie ist homogen und linear in den Elementen jeder Reihe (Zeile oder Kolonne).
2. Sie ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man die entsprechenden Elemente zweier Parallelreihen (H_i und H_k oder V_i und V_k) miteinander vertauscht.

2a. Hieraus folgt, dafs die Determinante identisch verschwindet, sobald die entsprechenden Elemente zweier Parallelreihen beziehlich gleich sind, d. h. sobald $H_i = H_k$ bezw. $V_i = V_k$ ist, oder also wenn

$$u_{ir} = u_{kr}, \quad \text{bezw.} \quad u_{ri} = u_{rk} \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

ist.

3. Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein und dasselbe Vielfache der entsprechenden Elemente einer Parallelreihe addiert, d. h. es ist z. B. für die Zeilen

$$|\cdots H_i + tH_k \cdots H_k \cdots| = |\cdots H_i \cdots H_k \cdots|.$$

4. Die Determinante wird mit einer Konstanten multipliziert, wenn man alle Elemente einer beliebigen Reihe (Zeile oder Kolonne) mit derselben multipliziert.
5. Die Determinante bleibt ungeändert, wenn man ihre Zeilen mit ihren Kolonnen vertauscht.

6. Ist

$$U_{gk} = \sum_{h=1}^{n} u_{gh} w_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n),$$

hängt also das System (U_{gk}) mit den Systemen (u_{gh}) und (w_{hk}) durch die Kompositionsgleichung $(U_{gk}) = (u_{gh})(w_{hk})$ zusammen, so ist die Determinante des komponierten Systemes dem Produkte der Determinanten beider Komponenten gleich, d. h. es ist

$$|U_{gk}| = |u_{gh}|\,|w_{hk}|,$$

oder auch

$$|u_{hi}|\,|w_{ik}| = \left|\sum_i u_{hi} w_{ik}\right|.$$

7. Die Determinante $|u_{ik}|$ hat den Wert

$$|u_{ik}| = \sum_{h_i} \prod_{g>k} \frac{h_g - h_k}{g-k}\, u_{1h_1} \ldots u_{nh_n}.$$

8. Die Determinante des Einheitssystemes hat den Wert $+1$.

§ 3.

In den Gleichungen

$$(1) \qquad |u_{ik}| = \Sigma \varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n} u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n}$$

$$(2) \qquad \varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n} = \prod_{g>k} \left(\frac{h_g - h_k}{g-k}\right) \qquad (g, k = 1, 2, \ldots n)$$

besitzen wir eine von jeder Symbolik freie Darstellung einer Determinante. Wir haben einfach in dem Anfangsgliede derselben $u_{11} u_{22} \ldots u_{nn}$ die zweiten Indizes auf alle möglichen Weisen zu permutieren und einem jeden der $n!$ so sich ergebenden Produkte $u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n}$ das durch (2) bestimmte positive oder negative Vorzeichen zu geben.

Da es in dem Produkte (2) für $\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ nur auf das Vorzeichen der einzelnen Faktoren ankommt, und da die im Nenner stehenden Differenzen $(g-k)$ alle positiv sind, so kann man dasselbe folgendermaßen wesentlich einfacher schreiben. Ist a eine beliebige reelle Zahl, so wollen wir

$$\operatorname{sgn}(a) = +1, \quad -1 \quad \text{oder} \quad = 0$$

setzen, je nachdem a positiv, negativ oder Null ist. Dann ergibt sich für unser Vorzeichen das Produkt

$$(2a) \qquad \varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n} = \prod_{g>k} \operatorname{sgn}(h_g - h_k);$$

und hier brauchen wir den Fall $h_\varrho = h_k$ nicht auszuschliefsen, da bei dieser Festsetzung das zugehörige $\varepsilon_{h_1,\ldots h_n}$ dann von selbst gleich Null wird.

So hat z. B. in der Determinante fünfter Ordnung das Glied $u_{15}\,u_{23}\,u_{32}\,u_{41}\,u_{54}$ das negative Vorzeichen, weil das der Permutation $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (5, 3, 2, 1, 4)$ entsprechende Produkt

$$\begin{aligned}(4-1)(4-2)(4-3)&(4-5)\\ (1-2)(1-3)&(1-5)\\ (2-3)&(2-5)\\ &(3-5)\end{aligned}$$

sieben negative Faktoren enthält.

Aber schon aus diesem Beispiele erkennt man, dafs die Bestimmung der $n!$ Vorzeichen $\varepsilon_{h_1,h_2,\ldots h_n}$ auf diesem Wege höchst unbequem sein würde. Wir wollen daher aus der Darstellung (2) jenes Vorzeichens zunächst einfachere Bestimmungen für dasselbe herleiten.

Das Produkt $\varepsilon_{h_1,h_2,\ldots h_n}$ in (2) enthält so viele negative Faktoren $(h_\varrho - h_k)$ als in der Permutation $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ ein früher stehendes Element h_k gröfser ist als ein später stehendes h_ϱ, d. h. es enthält so oft einen negativen Faktor, als in jener Permutation ein gröfseres Element vor einem kleineren steht. Wir wollen eine solche Vertauschung der natürlichen Folge bei zwei Gröfsen h_ϱ und h_k eine Inversion nennen und sagen, eine Permutation $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ besitzt μ Inversionen, wenn μ Paare (h_k, h_ϱ) in Inversion stehen. Dann gilt also der Satz:

> Das Vorzeichen des Elementes $u_{1h_1}\,u_{2h_2}\ldots u_{nh_n}$ ist $+1$ oder -1, je nachdem die zugehörige Permutation $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Inversionen enthält.

Da also die oben betrachtete Permutation (5, 3, 2, 1, 4) $4 + 2 + 1 = 7$ Inversionen enthält, so hat das zugehörige Glied das negative Zeichen; ebenso hat das zu der Permutation (2, 9, 3, 8, 7, 4, 1, 5, 6) gehörige Element der Determinante neunter Ordnung das negative Vorzeichen, weil sie $1 + 7 + 1 + 5 + 4 + 1 = 19$ Inversionen enthält.

Aus dieser Tatsache in Verbindung mit den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Eigenschaften der Funktion $\varepsilon_{h_1,\ldots h_n}$ können wir nun ein merkwürdiges Resultat herleiten. Wir hatten gesehen, dafs die Funktion $\varepsilon_{\ldots h_\alpha \ldots h_\beta \ldots}$ ihr Vorzeichen ändert, wenn man zwei beliebige Elemente h_α und h_β miteinander vertauscht. Nach dem soeben gefundenen Resultate wechselt dieselbe Funktion aber das Vorzeichen, wenn sich bei jener Vertauschung die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl ändert. Also ergibt sich der Satz:

Vertauscht man in einer Permutation $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ zwei beliebige Elemente h_α und h_β miteinander, so ändert sich die Anzahl ihrer Inversionen stets um eine ungerade Zahl.

Da man offenbar von der natürlichen Anordnung $(1, 2, \ldots n)$ der n Zahlen, bei welcher die Anzahl der Inversionen gleich Null ist, zu einer beliebigen Permutation $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ stets durch eine Anzahl von successiven einfachen Transpositionen gelangen kann, so läfst sich das Vorzeichen $\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ auch durch den folgenden Satz bestimmen:

Das Vorzeichen $\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ ist $+1$ oder -1, je nachdem man von der natürlichen Anordnung $(1, 2, \ldots n)$ zu der Permutation $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von einfachen Transpositionen gelangt.

Man kann also die Determinante dadurch aus ihrem Anfangsgliede $u_{11} u_{22} \ldots u_{nn}$ bilden, dafs man die zweiten Indizes durch einfache Transpositionen auf alle möglichen Weisen permutiert und bei jeder einzelnen Transposition das Zeichen ändert.

Hieraus folgt auch zugleich, dafs die Anzahl jener einfachen Transpositionen immer gerade oder immer ungerade ist, wie man auch den Übergang von $(1, 2, \ldots n)$ zu $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ vermittelst Transpositionen machen möge.

Man kann demnach die $n!$ Permutationen $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ in zwei Klassen einteilen, je nachdem die Anzahl ihrer Inversionen gerade oder ungerade ist, oder, was dasselbe ist, je nachdem sie aus der ersten $(1, 2, \ldots n)$ durch eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Transpositionen hervorgeht. Wir wollen die einen die **geraden**, die anderen die **ungeraden Permutationen** nennen. Wendet man auf alle voneinander verschiedenen geraden Permutationen eine und dieselbe Transposition an, so erhält man ebensoviele ungerade Permutationen, welche alle ebenfalls voneinander verschieden sind. Denn wären von diesen etwa zwei einander gleich, so würden sie gleich bleiben, wenn man durch die nochmalige Anwendung derselben Transposition wieder zu den ursprünglichen Permutationen zurückkehrte. Hieraus folgt, dafs die Anzahl aller ungeraden Permutationen der aller geraden mindestens gleich ist. Wäre man aber von den ungeraden Permutationen ausgegangen, so würde man durch Anwendung derselben Schlüsse finden, dafs auch umgekehrt ihre Anzahl gleich oder gröfser als die Anzahl der geraden Permutationen ist.

Also enthalten beide Klassen gleich viele, nämlich je $\frac{1}{2} n!$ Permutationen, und man erhält für die Determinanten n^{ter} Ordnung den folgenden Satz:

Die Determinante n^{ter} Ordnung besteht aus $n!$ Produkten $u_{1h_1} u_{2h_2} \dots u_{nh_n}$; von diesen hat die eine Hälfte das positive, die andere das negative Vorzeichen, je nachdem die zugehörige Permutation $(h_1, h_2, \dots h_n)$ in die Klasse der geraden oder in die der ungeraden Permutationen gehört.

Zwei Permutationen $(h_1, h_2, \dots h_n)$ und $(h_1', h_2', \dots h_n')$ gehören in dieselbe Klasse oder in verschiedene Klassen, je nachdem die eine in die andere durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen übergeführt werden kann. Die Entscheidung dieser Frage wird sehr erleichtert durch die folgende einfache Überlegung.

Vertauscht man in einer Permutation $(h_1, \dots h_\nu; h_{\nu+1}, \dots h_n)$ ν Elemente, etwa die ν ersten unter ihnen, cyklisch, während die $(n - \nu)$ übrigen ungeändert bleiben, so erhält man nun eine neue Permutation $(h_2, h_3, \dots h_\nu, h_1; h_{\nu+1}, \dots h_n)$, welche derselben Klasse angehört oder nicht, je nachdem ν ungerade oder gerade ist. In der Tat erkennt man sofort, daſs die cyklische Permutation $(h_1, h_2, \dots h_\nu)$ oder in leicht verständlicher Bezeichnung die Permutation

$$\binom{h_1, h_2, \dots h_\nu}{h_2, h_3, \dots h_1}$$

ersetzt werden kann durch die Folge der $(\nu - 1)$ einfachen Transpositionen

$$\binom{h_1}{h_2}, \binom{h_1}{h_3}, \dots \binom{h_1}{h_\nu},$$

bei denen ja das erste Element allmählich an die ν^{te} Stelle wandert, ohne daſs $h_2, h_3, \dots h_\nu$ ihre Aufeinanderfolge verändern.

Jede cyklische Permutation von ν Elementen ist also äquivalent $(\nu - 1)$ Transpositionen.

Nun kann man aus einer gegebenen Permutation $(h_1, h_2, \dots h_n)$ jede andere durch cyklische Vertauschung einzelner Gruppen von Elementen ableiten. Soll z. B. die Permutation

$$(9, 2, 3, 7, 5, 6, 1, 8, 4) \quad \text{in} \quad (4, 7, 2, 3, 5, 1, 9, 8, 6)$$

übergeführt werden, eine Aufgabe, welche durch

$$\binom{9, 2, 3, 7, 5, 6, 1, 8, 4}{4, 7, 2, 3, 5, 1, 9, 8, 6}$$

bezeichnet werden kann, so beginne man mit dem ersten umzustellenden Elemente 9, welches durch 4 zu ersetzen ist, und durchstreiche dann die 9; hierauf suche man die Zahl 4 in der ersten Permutation auf, welche in 6 übergeht, und durchstreiche die Zahl 4, und fahre so lange fort, bis man wieder zu der Anfangszahl 9 in der oberen Reihe

zurückgelangt ist. Die so erlangten Zahlen schreibe man der erhaltenen Folge gemäfs in einen Cyklus. Dann gehe man von der ersten noch nicht durchstrichenen Zahl der oberen Reihe aus, bilde in gleicher Weise einen zweiten Cyklus und fahre so lange fort, bis alle Ziffern durchstrichen sind. So kann jede Permutation $\begin{pmatrix} h_1, & h_2, & \ldots h_n \\ h'_1, & h'_2, & \ldots h'_n \end{pmatrix}$ in eine Reihe einfacher cyklischer Permutationen zerlegt werden. In unserem Beispiele erhält man so die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 9, & 2, & 3, & 7, & 5, & 6, & 1, & 8, & 4 \\ 4, & 7, & 2, & 3, & 5, & 1, & 9, & 8, & 6 \end{pmatrix} = (9,\, 4,\, 6,\, 1)\,(2,\, 7,\, 3)\,(5)\,(8),$$

wo die beiden einfachen Cyklen (5) und (8) bedeuten, dafs jene Ziffern ungeändert bleiben. Da nun jene Cyklen von je 4, 3, 1 und 1 Elementen bezw. 3, 2, 0 und 0 Transpositionen äquivalent sind, deren Gesamtanzahl 5 ungerade ist, so gehören jene beiden Permutationen in verschiedene Klassen. Zerfällt eine Permutation $\begin{pmatrix} h_1, & \ldots h_n \\ h'_1, & \ldots h'_n \end{pmatrix}$ in k Cyklen von bezw. $a_1, a_2, \ldots a_k$ Elementen, so beweist man genau ebenso, dafs sie

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_k - 1) = n - k$$

Transpositionen äquivalent ist; je nachdem also $(n - k)$ gerade oder ungerade ist, gehören $(h_1, \ldots h_n)$ und $(h'_1, \ldots h'_n)$ in dieselbe oder in verschiedene Klassen.

Hieraus folgt sofort, dafs für ein Produkt $u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n}$ das Vorzeichen

$$\text{(2b)} \qquad \varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n} = (-1)^{n-k}$$

ist, wenn die Permutation $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots n \\ h_1, & h_2, & \ldots h_n \end{pmatrix}$ in k Cyklen zerfällt.

§ 4.

Wir wollen endlich noch eine letzte und allgemeinste Bestimmung des Vorzeichens $\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ geben, welche erkennen läfst, dafs gerade dieses Vorzeichen erst durch die Determinantentheorie geschaffen wurde.

Wir wählen irgend ein spezielles System (a_{ik}), von welchem wir nur voraussetzen, dafs seine Determinante einen von Null verschiedenen Wert hat, also z. B. das Einheitssystem (E). Es seien wieder $V_1, V_2, \ldots V_n$ seine n Vertikalreihen, und es werde durch $|h_1, h_2, \ldots h_n|$ die Determinante desjenigen Systemes bezeichnet, dessen Vertikalreihen bezw. $V_{h_1}, V_{h_2}, \ldots V_{h_n}$ sind; hier bedeuten $h_1, h_2, \ldots h_n$ gewisse unter den Zahlen $1, 2, \ldots n$, welche entweder alle voneinander verschieden sind, oder auch zum Teil

einander gleich sein können, so daſs also die Determinante des ursprünglichen Systemes die Bezeichnung $|1, 2, \ldots n|$ erhält. Dann erkennt man sofort, daſs für jede Permutation $(h_1, \ldots h_n)$

$$(1) \qquad \varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n} = \frac{|h_1, h_2, \ldots h_n|}{|1, 2, \ldots n|}$$

ist. In der Tat folgt ja aus den Fundamentaleigenschaften der Determinanten n^{ter} Ordnung, daſs dieser Quotient die folgenden drei Eigenschaften hat, welche für die Zahlen $\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ charakteristisch waren:

I. $\varepsilon_{1, 2, \ldots n} = 1$.

II. $\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ wechselt sein Zeichen, wenn zwei Indizes h_i und h_k miteinander vertauscht werden.

III. $\varepsilon_{h_1, \ldots h_n}$ verschwindet, wenn zwei Indizes h_i und h_k einander gleich sind.

Damit ist unser Beweis in seinem vollen Umfange erbracht, und wir erhalten die folgende Darstellung einer jeden Determinante n^{ter} Ordnung

$$(2) \qquad |u_{ik}| = \sum_{(h)} \frac{|h_1, h_2, \ldots h_n|}{|1, 2, \ldots n|} u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{nh_n}.$$

Man kann von der allgemeinen Gleichung (1) ausgehend auch leicht zu der früheren Darstellung des Vorzeichens $\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n}$ zurückkehren. Es seien $z_1, z_2, \ldots z_n$ unabhängige Veränderliche; dann wählen wir für die Determinante $|1, 2, \ldots n|$ die folgende von *Cauchy* zuerst untersuchte Determinante n^{ter} Ordnung

$$(3) \qquad F(z_1, z_2, \ldots z_n) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots 1 \\ z_1, & z_2, & \ldots z_n \\ z_1^2, & z_2^2, & \ldots z_n^2 \\ \vdots & & \\ z_1^{n-1}, & z_2^{n-1}, & \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix} = |z_r^{s-1}| \quad (r, s = 1, 2, \ldots n).$$

Es ist leicht, ihren Wert anzugeben. Setzt man nämlich irgend zwei Variable z_g und z_k einander gleich, so verschwindet die Determinante, weil dann die beiden Kolonnen V_g und V_k einander gleich werden. Also ist $F(z_1, z_2, \ldots z_n)$ eine ganze ganzzahlige Funktion der n Variablen z_i, welche durch jeden der $\frac{n(n-1)}{2}$ Linienfaktoren

$$z_g - z_k \qquad \begin{pmatrix} g, k = 1, 2, \ldots n \\ g > k \end{pmatrix}$$

teilbar ist. Also enthält F auch das Produkt derselben, d. h. es besteht eine Identität

$$(3a)\qquad |z_r^{s-1}| = \Phi(z_1, \dots z_n) \prod_{g>k} (z_g - z_k) \qquad (g, k = 1, 2, \dots n),$$

wo Φ ebenfalls eine ganze ganzzahlige Funktion ihrer Argumente ist.

Ersetzt man nun in dieser Identität allgemein z_i durch tz_i, wo t eine neue Variable ist, so multipliziert sich $|z_r^{s-1}|$ mit

$$t^{1+2+\dots+(n-1)} = t^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

weil in dieser Determinante die Elemente der i^{ten} Zeile mit t^{i-1} multipliziert werden; und da das Produkt der $\frac{n(n-1)}{2}$ Linearfaktoren rechts denselben Faktor enthält, so folgt, daſs die noch unbekannte Funktion Φ eine ganze ganzzahlige homogene Funktion der nullten Dimension von $z_1, \dots z_n$, d. h. eine ganze Zahl C ist; es ist demnach

$$(3b)\quad |z_r^{s-1}| = C \cdot \Pi(z_g - z_k) = \begin{matrix} C(z_n - z_1)(z_n - z_2)\dots(z_n - z_{n-1}) \\ (z_{n-1} - z_1)(z_{n-1} - z_2)\dots \\ \vdots \\ (z_2 - z_1) \end{matrix}.$$

Um die Konstante C zu finden, beachten wir, daſs das Diagonalglied

$$z_1^0 z_2^1 z_3^2 \dots z_n^{n-1}$$

auf der linken Seite den Koeffizienten Eins hat, und daſs dieses Glied in der Determinante sonst nicht auftritt. Suchen wir nun in der Entwickelung des Produktes rechts dasselbe Glied, so besitzt es offenbar den Koeffizienten C, d. h. es ist $C = 1$. Also ergibt sich

$$|1, 2, \dots n| = |z_1^\lambda, z_2^\lambda, \dots z_n^\lambda| = \prod_{g>k} (z_g - z_k) \qquad (\lambda = 0, 1, \dots n-1).$$

Ersetzt man nun $z_1, \dots z_n$ durch $z_{h_1}, \dots z_{h_n}$, wodurch die Determinante $|1, 2, \dots n|$ in $|h_1, h_2, \dots h_n|$ übergeht, so folgt

$$|h_1, h_2, \dots h_n| = |z_{h_1}^\lambda, \dots z_{h_n}^\lambda| = \Pi(z_{h_g} - z_{h_k}),$$

und man erhält für das Vorzeichen $\varepsilon_{h_1, \dots h_n}$ den Ausdruck

$$(4)\qquad \varepsilon_{h_1, h_2, \dots h_n} = \frac{|z_{h_1}^\lambda, z_{h_2}^\lambda, \dots z_{h_n}^\lambda|}{|z_1^\lambda, z_2^\lambda, \dots z_n^\lambda|} = \prod_{g>k} \left(\frac{z_{h_g} - z_{h_k}}{z_g - z_k}\right),$$

welcher für variable $z_1, \dots z_n$ jenes Vorzeichen darstellt. Setzt man speziell $z_1 = 1$, $z_2 = 2, \dots z_n = n$, so erhält man endlich die Gleichung

(4a) $$\varepsilon_{h_1, h_2, \ldots h_n} = \prod_{g>k} \left(\frac{h_g - h_k}{g - k}\right),$$

zu welcher wir auf S. 295 Nr. (6) durch direkte Berechnung geführt worden waren.

Zum Abschlufs dieser auf die Darstellung der Determinanten bezüglichen Bemerkungen werde noch erwähnt, dafs man aus der Formel

$$|u_{gk}| = \Sigma\, \varepsilon_{h_1, \ldots h_n} u_{1 h_1} u_{2 h_2} \ldots u_{n h_n}$$

allein alle acht Eigenschaften der Determinanten herleiten kann, welche wir auf S. 298 und 299 durch die Untersuchung der Lösungen von n linearen Gleichungen gefunden hatten. Doch soll an dieser Stelle nicht näher auf die Begründung dieser Behauptung eingegangen werden.

Achtzehnte Vorlesung.

Die charakteristischen Eigenschaften der Determinanten in vereinfachter Darstellung. — Die Funktionen $\Theta(u_{gh})$ der mn Elemente einer Matrix. — Das Multiplikationstheorem für zwei Matrizen. — Anwendungen. — Die abgeleiteten Systeme. — Das Fundamentaltheorem für die Komposition der abgeleiteten Systeme.

§ 1.

Im § 1 der siebzehnten Vorlesung hatten wir ein vollständiges System charakteristischer Eigenschaften der Determinanten kennen gelernt. Wir hatten nämlich den Satz bewiesen:

Eine Funktion $\Theta(u_{gh})$ der n^2 Elemente eines quadratischen Systemes

$$(u_{gh}) = \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

(I) unterscheidet sich von der Determinante $|u_{gh}|$ nur um einen von den Elementen u_{gh} unabhängigen Faktor, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Sie ist linear und homogen in den Elementen einer jeden Horizontalreihe.
2. Sie ändert bei der Vertauschung der Elemente zweier Horizontalreihen nur ihr Vorzeichen.

Wir wollen diesen Satz im folgenden verallgemeinern und ihn dann für die Untersuchung aller tiefer liegenden Eigenschaften der Determinanten benutzen.

Zunächst können wir jene beiden Fundamentaleigenschaften auch folgendermaſsen aussprechen:

Eine Funktion $\Theta(u_{gh}) = \Theta(H_1, H_2, \dots H_n)$ unterscheidet sich von der Determinante nur durch einen von den Elementen u_{gh} unabhängigen Faktor, wenn sie

(Ia)
1. linear und homogen ist in den Elementen einer jeden Zeile, und
2. wenn sie verschwindet, sobald man die Elemente einer Zeile H_i durch die Elemente irgend einer anderen ersetzt.

In der Tat beweist man genau ebenso wie auf S. 126, daſs aus der zweiten Eigenschaft in (Ia) unmittelbar die zweite Eigenschaft in (I) folgt. Betrachtet man nämlich z. B. die nach (2) in (Ia) identisch verschwindende Funktion $\Theta(H_1 + H_2, H_1 + H_2, H_3, \ldots H_n)$, so ergibt sich unter Benutzung der Tatsache, daſs Θ homogen und linear ist in den Elementen der ersten und zweiten Zeile, auch hier die Gleichung

$$\Theta(H_1 + H_2, H_1 + H_2, \ldots H_n) = \Theta(H_1, H_1, \ldots H_n) + \Theta(H_1, H_2, \ldots H_n) \\ + \Theta(H_2, H_1, \ldots H_n) + \Theta(H_2, H_2, \ldots H_n);$$

nach Weglassung der drei nach (Ia) (2) verschwindenden Funktionen folgt also in der Tat

$$\Theta(H_2, H_1, \ldots H_n) = -\Theta(H_1, H_2, \ldots H_n),$$

und ebenso wird der Beweis für je zwei Horizontalreihen geführt.

Wir wollen nun den Satz (I) durch das folgende äquivalente Theorem ersetzen, welches weniger Voraussetzungen erfordert.

(Ib) Eine Funktion $\Theta(u_{gh})$ ist gleich $C|u_{gh}|$, wenn sie
1. linear und homogen ist in den Elementen der ersten Zeile H_1, und wenn sie
2. bei der Vertauschung der Elemente von H_1 mit den entsprechenden Elementen einer der Zeilen $H_2, H_3, \ldots H_n$ nur ihr Zeichen ändert.

Aus der Voraussetzung nämlich, daſs $\Theta(u_{gh})$ eine homogene lineare Funktion der Elemente $u_{11}, \ldots u_{1n}$ von H_1 ist, folgt nämlich durch Vertauschung von H_1 mit H_i unter Benutzung der zweiten Voraussetzung, daſs $-\Theta(u_{gh})$ und also auch $\Theta(u_{gh})$ selbst homogen und linear in den Elementen von H_i ist, d. h. die erste Voraussetzung in (I) ist eine Folge von (Ib). Um dasselbe für die zweite Voraussetzung von (I) zu beweisen, beachten wir nur, daſs jede Vertauschung $\binom{H_i}{H_k}$ zweier beliebigen Horizontalreihen ersetzt werden kann durch die drei hintereinander angewendeten Vertauschungen $\binom{H_1}{H_i}\binom{H_1}{H_k}\binom{H_1}{H_i}$; denn bei diesen Zeilenvertauschungen geht ja $\Theta(H_1, \ldots H_i, \ldots H_k, \ldots)$ successive über in $\Theta(H_i, \ldots H_1, \ldots H_k, \ldots)$, $\Theta(H_i, \ldots H_k, \ldots H_1, \ldots)$, $\Theta(H_1, \ldots H_k, \ldots H_i, \ldots)$, und hieraus folgt in der Tat, daſs $\Theta(u_{gh})$ auch wirklich bei der Zeilenvertauschung $\binom{H_i}{H_k}$ nur das Zeichen ändert.

Natürlich gelten die Sätze (I), (Ia), (Ib) auch in Bezug auf die Vertikalreihen des Systemes (u_{gh}).

§ 2.

Wir wollen nun diese Sätze folgendermaßen verallgemeinern: Statt eines quadratischen Systemes betrachten wir eine rechteckige Matrix von mn Elementen

$$(1) \qquad (u_{gh}) = \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots\ldots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots\ldots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{m1}, & u_{m2}, & \ldots\ldots & u_{mn} \end{pmatrix},$$

wo $m \gtreqless n$ sein kann. Wir bezeichnen wieder mit $H_1, H_2, \ldots H_m$ und $V_1, V_2, \ldots V_n$ ihre Horizontal- und Vertikalreihen und wollen zunächst $m \leqq n$ annehmen; der Fall $m > n$ wird nachher leicht auf diesen reduziert werden

Auch hier suchen wir eine Funktion $\Theta(u_{gh})$, welche die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Sie ist eine lineare homogene Funktion der n Elemente $u_{11}, \ldots u_{1n}$ der ersten Horizontalreihe.
2. Sie ändert bei der Vertauschung der ersten Zeile H_1 mit irgend einer anderen nur ihr Vorzeichen.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesen beiden Eigenschaften ist dann nach den soeben durchgeführten Betrachtungen, daß $\Theta(u_{gh})$ eine homogene lineare Funktion der Elemente einer jeden Zeile H_i, also eine **ganze** rationale Funktion aller mn Elemente u_{gh} ist, und daß sie bei jeder Zeilenvertauschung $\binom{H_i}{H_k}$ ihr Vorzeichen ändert.

Wir können zunächst eine ganze Anzahl von speziellen Funktionen dieser Art angeben und wir werden dann zeigen, daß und wie sich die allgemeinste Lösung unserer Aufgabe aus jenen Einzellösungen zusammensetzt.

Lassen wir zunächst aus den n Vertikalreihen $V_1, V_2, \ldots V_n$ die $(n-m)$ letzten fort, so erhalten wir ein quadratisches System

$$(V_1, V_2, \ldots V_m) = \begin{pmatrix} u_{11}, & \ldots & u_{1m} \\ \vdots & & \\ u_{m1}, & \ldots & u_{mm} \end{pmatrix}$$

von m^2 Elementen, dessen Determinante

$$D_1 = | V_1, V_2, \ldots V_m |$$

offenbar die beiden verlangten Eigenschaften besitzt; denn sie ist eine lineare homogene Funktion von $u_{11}, \ldots u_{1m}, u_{1,m+1}, \ldots u_{1n}$, in der nur

die Koeffizienten von $u_{1,m+1}, \dots u_{1n}$ Null sind, und sie ändert ihr Vorzeichen bei jeder Vertauschung zweier Zeilen H_i und H_k der Matrix (1).

Aus dem Systeme (u_{gh}) kann man durch Fortlassung von je $(n-m)$ Vertikalreihen im ganzen

$$\mu = n_m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\dots\, m}$$

quadratische Systeme von je m^2 Elementen

$$(V_{h_1}, V_{h_2}, \dots V_{h_m})$$

herleiten, wenn $(h_1, h_2, \dots h_m)$ alle n_m Kombinationen von je m unter den n Zahlen $(1, 2, \dots n)$ ohne Wiederholung bedeutet. Wir wollen diese Kolonnenkombinationen stets in der natürlichen Reihenfolge, d. h. so geordnet veraussetzen, daſs

$$h_1 < h_2 < \dots < h_m$$

ist. Diesen Systemen entsprechen dann die $\mu = n_m$ Determinanten

$$| V_{h_1}, V_{h_2}, \dots V_{h_m} |.$$

Wir wollen dieselben durch

$$D_1, D_2, \dots D_\mu$$

bezeichnen und bei dieser Numerierung die folgende ein für allemal fest anzunehmende Reihenfolge voraussetzen.

Von zwei Kombinationen

$$(h_1, h_2, \dots h_m) \quad \text{und} \quad (h'_1, h'_2, \dots h'_m)$$

wollen wir die zweite dann als die **spätere** bezeichnen, wenn von den Differenzen $h'_1 - h_1, h'_2 - h_2, \dots$ die erste nicht verschwindende positiv ausfällt.

Ist dann von drei solchen Kombinationen die zweite später als die erste und die dritte später als die zweite, so ist offenbar auch die dritte später als die erste.

Für die Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & u_{15} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & u_{25} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34}, & u_{35} \end{pmatrix}$$

würden bei dieser Anordnung den $\frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 10$ Determinanten $D_1, \dots D_{10}$ die folgenden Indexkombinationen entsprechen

(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,5), (3,4,5).

Sieht man hier die Indizes als Ziffern dreistelliger Zahlen im dekadischen Zahlensysteme an, so ist die Anordnung derart, daſs die zugehörigen Zahlen eine zunehmende Reihe bilden; und das Analoge gilt im allgemeinen Falle, wenn man $(h_1, h_2, \dots h_n)$ als die Ziffern einer Zahl ansieht, welche in einem Zahlensysteme mit irgend einer Grundzahl $g > n$ gebildet ist. Wir wollen daher die dieser Ordnung entsprechende Numerierung der Determinanten D_i als die **arithmetische** oder die **natürliche** Aufeinanderfolge bezeichnen.

Es sei nun (u_{gh}) eine Matrix von m Zeilen und n Kolonnen, und $D_1, D_2, \dots D_\mu$ seien die $\mu = n_m$ zugehörigen Determinanten m^{ter} Ordnung, wobei $n_m = 0$ ist, falls $m > n$ sein sollte. Sind dann $C_1, \dots C_\mu$ μ willkürliche Konstanten, so erkennt man unmittelbar, daſs die Funktion

$$D = C_1 D_1 + C_2 D_2 + \cdots + C_\mu D_\mu \tag{2}$$

genau ebenso wie die vorher betrachtete Funktion D_1 die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Sie ist eine homogene lineare Funktion der Elemente der ersten Horizontalreihe von (u_{gh}).
2. Sie ändert nur ihr Zeichen, wenn man die erste Zeile mit irgend einer anderen vertauscht.

In der Tat kommen ja beide Eigenschaften jeder von diesen μ Determinanten $D_1, \dots D_\mu$ zu.

Wir beweisen jetzt, daſs auch umgekehrt jede Funktion

$$\Theta(V_1, V_2, \dots V_n) = \Theta(u_{gh})$$

der mn Variablen u_{gh}, welche diese beiden Eigenschaften hat, stets in der Form (2) darstellbar ist.

In der Tat, besitzt die Funktion $\Theta(V_1, V_2, \dots V_n)$ jene beiden Eigenschaften, so behält sie dieselben auch, wenn man gewissen unter den mn Variablen u_{gh} beliebige spezielle Werte beilegt. Wir setzen nun alle Elemente der Vertikalreihen $V_{m+1}, V_{m+2}, \dots V_n$ gleich Null. Dann hängt die Funktion $\Theta(V_1, \dots V_m; 0, \dots 0)$ nur noch von den m^2 Elementen der ersten Determinante D_1 ab und besitzt in Bezug auf diese die beiden in (1) und (2) angegebenen Eigenschaften. Also muſs nach dem auf S. 308 bewiesenen speziellen Satze (Ib)

$$\Theta(V_1, \dots V_m; 0, \dots 0) = C_1 D_1$$

sein, wo C_1 einen Zahlenfaktor bedeutet. Ersetzt man in dieser Identität das System $(V_1, \dots V_m)$ durch das zugehörige Einheitssystem

$$E_1 = \begin{Bmatrix} 1, 0, \ldots 0, & 0, \ldots 0 \\ 0, 1, \ldots 0, & 0, \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, 0, \ldots 1, & 0, \ldots 0 \end{Bmatrix}$$

und beachtet, daſs dann $D_1 = 1$ wird, so ergibt sich

$$C_1 = \Theta(E_1).$$

Ferner hat aber die neue Funktion

$$(3) \qquad \Theta_1(u_{gh}) = \Theta(V_1, \ldots V_n) - \Theta(E_1) \cdot D_1$$

dieselben beiden Eigenschaften, aber auſserdem noch die weitere, daſs sie verschwindet, wenn die Vertikalreihen $V_{m+1}, V_{m+2}, \ldots V_n$ gleich Null gesetzt werden.

Wir untersuchen jetzt diese neue Funktion $\Theta_1(u_{gh})$ weiter und setzen in ihr alle Vertikalreihen, auſser $V_1, V_2, \ldots V_{m-1}, V_{m+1}$ gleich Null, welche der zweiten Determinante D_2 entsprechen. Dann ergibt sich ganz ebenso, daſs

$$\Theta_1(V_1, \ldots V_{m-1}, 0, V_{m+1}, 0, \ldots 0) = C_2 D_2$$

sein muſs; oder wegen (3) erhalten wir für die ursprüngliche Funktion die Gleichung

$$\Theta(V_1, \ldots V_{m-1}, 0, V_{m+1}, 0, \ldots 0) = C_2 D_2.$$

Um die Konstante C_2 zu bestimmen, ersetzen wir in dieser Identität die Elemente der Vertikalreihen $V_1, \ldots V_{m-1}, V_{m+1}$ durch das zu ihnen gehörige Einheitssystem. Bezeichnen wir dasselbe entsprechend durch E_2 und beachten wir, daſs dann die Determinante $D_2 = 1$ wird, so folgt

$$C_2 = \Theta(E_2).$$

Also ergibt sich jetzt, daſs die neue Funktion

$$\Theta_2(u_{gh}) = \Theta_1(u_{gh}) - \Theta(E_2) D_2 = \Theta(u_{gh}) - \big(\Theta(E_1) D_1 + \Theta(E_2) D_2\big)$$

ebenfalls die beiden Eigenschaften 1 und 2 besitzt, und daſs sie auſserdem verschwindet, wenn entweder die $(n-m)$ Vertikalreihen $V_{m+1}, \ldots V_n$ oder die $(n-m)$ Vertikalreihen $V_m, V_{m+2}, \ldots V_n$ gleich Null gesetzt werden. Fährt man nun in derselben Weise fort, so erhält man zuletzt eine Funktion

$$\Theta_\mu(u_{gh}) = \Theta(u_{gh}) - \big(\Theta(E_1) D_1 + \Theta(E_2) D_2 + \cdots + \Theta(E_\mu) D_\mu\big),$$

welche die beiden Eigenschaften 1 und 2 besitzt, und auſserdem verschwindet, wenn man alle Elemente irgend welcher $(n-m)$ Vertikalreihen gleich Null setzt.

Eine solche Funktion mufs nun identisch Null sein. In der Tat, enthielte $\Theta_\mu(u_{gh})$ auch nur ein von Null verschiedenes Element, so müfste es die Form haben

$$c_{h_1, h_2, \ldots h_m} u_{1h_1} u_{2h_2} \ldots u_{mh_m},$$

weil ja Θ_μ nach der Voraussetzung homogen und linear in den Elementen von $H_1, H_2, \ldots H_m$ ist. Setzt man aber in Θ_μ alle Vertikalreihen aufser $V_{h_1}, V_{h_2}, \ldots V_{h_m}$ gleich Null, so verschwindet Θ_μ nach der Voraussetzung identisch, während das Produkt $u_{1h_1}, \ldots u_{mh_m}$ ungeändert bleibt. Es müfste also entgegen unserer Voraussetzung der Koeffizient $c_{h_1, \ldots h_m}$ Null sein; unsere Behauptung ist demnach in ihrem vollen Umfange erwiesen.

Sind $(M_1, M_2, \ldots M_r)$ r ganze Funktionen beliebig vieler Variablen, und ist M eine andere Funktion, welche durch jene linear und homogen mit konstanten Koeffizienten, d. h. in der Form

$$M = C_1 M_1 + C_2 M_2 + \cdots + C_r M_r$$

dargestellt werden kann, so sagen wir, M enthält das Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots M_r)$. Unter Benutzung dieser Bezeichnung können wir das soeben gefundene Resultat in dem folgenden Satze aussprechen:

> Eine Funktion der mn Elemente (u_{gh}) einer Matrix, welche:
>
> 1. homogen und linear in den Elementen der ersten Zeile H_1 ist, und die
> 2. nur ihr Vorzeichen ändert, wenn man die Elemente der ersten Horizontalreihe mit den entsprechenden irgend einer anderen vertauscht,
>
> enthält das Modulsystem $(D_1, D_2, \ldots D_\mu)$, welches aus den $\mu = n_m$ Determinanten m^{ter} Ordnung der Matrix (u_{gh}) gebildet ist.

Ist speziell $m > n$, so ist $\mu = n_m = 0$; die Matrix (u_{gh}) enthält dann gar keine zugehörige Determinante m^{ter} Ordnung. In diesem Falle existiert also keine von Null verschiedene Funktion $\Theta(u_{gh})$, welche die beiden Eigenschaften 1 und 2 besitzt.

Ganz ebenso zeigt man, dafs der soeben für die Horizontalreihen einer beliebigen Matrix bewiesene Satz auch für ihre Vertikalreihen gilt; nur treten dann eben an die Stelle der $\mu = n_m$ Determinanten m^{ter} Ordnung $D_1, D_2, \ldots D_\mu$, welche man aus (u_{gh}) durch Weglassung von je $(n - m)$ Vertikalreihen erhält, die

$$\nu = m_n = \frac{m(m-1), \ldots (m-n+1)}{1 \ . \ 2, \quad \ldots \quad n}$$

Determinanten n^{ter} Ordnung $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_\nu$, welche man aus (u_{gh}) durch Weglassung von je $(m-n)$ Horizontalreihen erhält.

> Eine Funktion $\mathsf{H}(u_{gh})$, welche in Bezug auf die erste Vertikalreihe V_1 einer Matrix (u_{gh}) homogen und linear ist und bei jeder der $(n-1)$ Vertauschungen (V_1, V_i) nur ihr Zeichen ändert, ist also stets in der Form
> $$\mathsf{H}(\bar{E}_1)\Delta_1 + \mathsf{H}(\bar{E}_2)\Delta_2 + \cdots + \mathsf{H}(\bar{E}_\nu)\Delta_\nu$$
> darstellbar, wenn $\bar{E}_1, \ldots \bar{E}_\nu$ die zu den Systemen von $\Delta_1, \ldots \Delta_\nu$ gehörigen Einheitssysteme bedeuten.

Ist m von n verschieden, so ist stets eine der beiden Anzahlen m_n und n_m gleich Null. Ist dagegen $m = n$, so sind beide Zahlen $n_m = m_n = 1$.

> Eine Funktion $\Theta(u_{gh})$ der mn Variablen (u_{gh}), welcher die beiden oben angegebenen Eigenschaften sowohl in Bezug auf die Zeilen als auf die Kolonnen der Matrix (u_{gh}) zukommen, ist also stets gleich Null, es sei denn, daſs $m = n$, daſs also das System (u_{gh}) quadratisch ist. In diesem letzten Falle ist notwendig
> $$\Theta(u_{gh}) = C \cdot |u_{gh}|,$$
> wo $C = \Theta(E)$ eine Konstante bedeutet.

Wir zeigen endlich noch, daſs jede Funktion $\Theta(u_{gh})$ der mn Elemente u_{gh}, welche die beiden Eigenschaften 1 und 2 auf S. 313 hat, stets eine unzerlegbare Funktion ihrer Argumente ist. Wäre nämlich $\Theta(u_{gh})$ gleich dem Produkte $\Theta_1(u_{gh}) \cdot \Theta_2(u_{gh})$ zweier in den u_{gh} ganzen Faktoren, so folgt aus der ersten Eigenschaft von Θ, daſs derjenige Faktor, welcher auch nur ein Element einer Zeile H_i enthält, alle Elemente $(u_{i1}, \ldots u_{in})$ dieser Zeile enthalten muſs, während der andere Faktor von den Elementen dieser Zeile unabhängig ist; andernfalls könnte nämlich das Produkt $\Theta_1 \Theta_2$ nicht homogen und linear in den Elementen von H_i sein.

Ist ferner das System (u_{gh}) quadratisch, so ist $\Theta(u_{gh}) = C|u_{gh}|$, und die Determinante besitzt dann die Eigenschaften 1 und 2, also auch die soeben aus ihnen abgeleitete, sowohl in Bezug auf die Zeilen, als auch für die Kolonnen des Systemes (u_{gh}). Wäre nun $|u_{gh}|$ gleich einem Produkte $\Theta_1 \Theta_2$ von zwei ganzen Funktionen von (u_{gh}) und enthielte Θ_1 auch nur ein Element von H_i, so müſste Θ_1 nach der soeben gemachten Bemerkung alle Elemente $(u_{i1}, u_{i2}, \ldots u_{im})$ dieser Zeile enthalten; da aber dann dieser erste Faktor je ein Element aller Vertikalreihen $V_1, \ldots V_m$ enthält, so müſste er, da der oben für die Zeilen bewiesene Satz hier auch für die Kolonnen gilt, auch jedes Element

aller Kolonnen enthalten, d. h. Θ_2 müfste von allen Elementen unabhängig oder eine Konstante sein. Da aber $|u_{gh}|$ auch keinen Zahlenfaktor enthält, so gilt zunächst der Satz:

Die Determinante $|u_{gh}|$ ist eine irreduktible Funktion ihrer m^2 Elemente.

Die allgemeinste Funktion $\Theta(u_{gh})$ von mn Elementen ist nun ebenfalls linear, aber nicht homogen in den Elementen von jeder ihrer n Vertikalreihen, und hieraus folgt genau ebenso wie für den Fall $m = n$, dafs ein Faktor Θ_1, der auch nur ein Element einer Kolonne V_k enthält, alle Elemente von V_k enthalten mufs. Hieraus ergibt sich genau wie vorher die Irreduktibilität jeder Funktion $\Theta(u_{gh})$.

§ 3.

Wir wollen den im vorigen Abschnitte bewiesenen Fundamentalsatz zunächst benutzen, um das Multiplikationstheorem für komponierte Systeme in seiner allgemeinsten Fassung zu beweisen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zwei rechteckige Systeme

$$(1) \qquad (u_{ik}) = \begin{pmatrix} u_{11}, & \cdots & u_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{m1}, & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}, \quad (v_{kl}) = \begin{pmatrix} v_{11}, & \dots & v_{1m} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ v_{n1}, & \dots & v_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots m \\ k = 1, 2, \dots\dots\dots n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots\dots\dots n \\ l = 1, 2, \dots m \end{pmatrix},$$

von denen das erste m Horizontalreihen H_i und n Vertikalreihen V_k, und das zweite umgekehrt n Zeilen H_k' und m Kolonnen V_l' hat.

Wir komponieren diese beiden Systeme in der auf S. 284 angegebenen Weise und erhalten so ein quadratisches System von m^2 Elementen, welches mit Hilfe der früher benutzten Bezeichnungsweise folgendermafsen geschrieben werden kann

$$(2) \qquad (w_{il}) = (u_{ik})(v_{kl}) = \begin{pmatrix} H_1 V_1', & H_1 V_2', & \dots & H_1 V_m' \\ H_2 V_1', & H_2 V_2', & \dots & H_2 V_m' \\ \vdots & & & \\ H_m V_1', & H_m V_2', & \dots & H_m V_m' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i, l = 1, 2, \dots m \\ k = 1, 2, \dots n \end{pmatrix},$$

wo allgemein

(3) $$w_{il} = H_i V_l' = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} v_{kl}$$
$$= u_{i1} v_{1l} + \cdots + u_{im} v_{ml} + u_{i,m+1} v_{m+1,l} + \cdots + u_{in} v_{nl}$$

ist. Wir bilden nun die Determinante $|w_{il}|$ und untersuchen ihre Abhängigkeit von den Elementen u_{ik} und v_{kl} der beiden Komponenten (u_{ik}) und (v_{kl}).

Man erkennt nun sofort, daſs jede Determinante $|w_{il}|$ nach dem auf S. 313 bewiesenen Satze das aus den Determinanten m^{ter} Ordnung von (u_{ik}) gebildete Modulsystem $(D_1, D_2, \dots D_\mu)$ enthält; denn aus der Darstellung (2) von (w_{il}) folgt, daſs $|w_{il}|$ eine homogene lineare Funktion der Elemente u_{1t} der ersten Horizontalreihe H_1 von $|u_{ik}|$ ist, weil ja H_1 nur in der ersten Zeile von (w_{il}) auftritt. Vertauscht man aber zweitens in (u_{ik}) H_1 etwa mit H_r, so vertauscht sich in dem komponierten Systeme offenbar ebenfalls die erste mit der r^{ten} Zeile, d. h. seine Determinante ändert nur das Vorzeichen. Also besteht wirklich eine Gleichung

(4) $$|w_{il}| = C_1 D_1 + C_2 D_2 + \cdots + C_\mu D_\mu,$$

in welcher die Koeffizienten $C_1, \dots C_\mu$ von den Elementen des ersten Systemes unabhängig sind.

Um nun z. B. den ersten Koeffizienten C_1 in (4) zu bestimmen, beachten wir, daſs $C_1 = \Theta(E_1)$ ist, d. h. gleich dem Werte von $|w_{il}|$, welchen man erhält, wenn man das Koeffizientensystem (u_{ik}) durch das zugehörige Einheitssystem

(5) $$E_1 = (\delta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1, & 0, \dots 0, & 0, \dots 0 \\ 0, & 1, \dots 0, & 0, \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0, & 0, \dots 1, & 0, \dots 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots m \\ k = 1, 2, \dots\dots\dots n \end{pmatrix}$$

ersetzt, wo hier, wie stets im folgenden

(5a) $$\delta_{ik} = 0 \quad (i \gtrless k), \qquad \delta_{kk} = 1$$

gesetzt wird.

Komponiert man nun dieses spezielle System (5) mit (v_{kl}), so ergibt sich allgemein

$$w_{il} = H_i V_l' = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} v_{kl} = \delta_{i1} v_{1l} + \cdots + \delta_{ii} v_{il} + \cdots + \delta_{in} v_{nl} = v_{il},$$

d. h. das komponierte System wird gleich dem aus den m ersten Horizontalreihen von (v_{kl}) gebildeten Partialsystem. Also ist C_1 gleich

der Determinante Δ_1, welche aus den m ersten Zeilen $(H_1', \ldots H_m')$ von (v_{kl}) gebildet ist.

Es sei jetzt allgemein

$$D_i = | V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots V_{i_m} |$$

irgend eine Partialdeterminante des ersten Systemes (u_{ik}), welche aus den Elementen der Vertikalreihen $V_{i_1}, \ldots V_{i_m}$ gebildet ist, und

$$\Delta_i = | H_{i_1}', H_{i_2}', \ldots H_{i_m}' |$$

sei die Partialdeterminante von (v_{kl}), welche zu den entsprechenden Horizontalreihen $H_{i_1}', \ldots H_{i_m}'$ gehört. Dann beweist man sehr leicht, daſs der Koeffizient C_i von D_i in (4) gleich Δ_i ist. Vertauscht man nämlich in der Kompositionsgleichung

$$(w_{il}) = (u_{ik})(v_{kl})$$

links und rechts zwei Vertikalreihen V_1 und V_k des ersten Systemes (u_{ik}) miteinander und zugleich dieselben Horizontalreihen H_1' und H_k' des zweiten Systemes, so ändert sich die Determinante $|w_{il}|$ nicht, weil in dem zugehörigen Systeme (w_{il}) sowohl die erste und die k^{te} Zeile, als auch die erste und die k^{te} Kolonne miteinander vertauscht werden.

Macht man nun in jener Kompositionsgleichung die folgenden $2m$ Vertauschungen

$$\begin{array}{llllll} V_1 \text{ mit } V_{i_1}, & V_2 \text{ mit } V_{i_2}, & \ldots & V_m \text{ mit } V_{i_m} \\ H_1' \;\; „ \;\; H_{i_1}', & H_2' \;\; „ \;\; H_{i_2}', & \ldots & H_m' \;\; „ \;\; H_{i_m}', \end{array}$$

so treten in beiden Komponenten (u_{ik}) und (v_{kl}) die zu D_i und Δ_i gehörigen Systeme an die erste Stelle, und da sich dabei $|w_{il}|$ nicht ändert, so folgt nach dem soeben bewiesenen Satze, daſs in der transformierten, also auch in der ursprünglichen Determinante $|w_{il}|$ der Koeffizient von D_i gleich Δ_i ist.

Es ergibt sich also die folgende Fundamentalgleichung für die Determinante eines aus zwei rechteckigen Matrizen komponierten quadratischen Systemes

$$|w_{il}| = |(u_{ik})(v_{kl})| = D_1\Delta_1 + D_2\Delta_2 + \cdots + D_\mu \Delta_\mu, \tag{6}$$

wenn $D_1, \ldots D_\mu$ und $\Delta_1, \ldots \Delta_\mu$ die Partialdeterminanten der beiden Komponenten in ihrer natürlichen Reihenfolge bedeuten.

Wir wollen zuerst einige unmittelbare Folgerungen aus diesem Satze angeben.

Ist speziell $m = n$, sind also beide Komponenten quadratische Systeme, so ergibt sich der gewöhnliche Multiplikationssatz

$$|(u_{ik})(v_{kl})| = |u_{ik}| \cdot |v_{kl}|. \tag{6a}$$

Ist dagegen $m > n$, so wird in (6) die rechte Seite Null, d. h. es ist

$$|w_{il}| = |(u_{ik})(v_{kl})| = 0. \tag{6b}$$

Es sei ferner das System $T = (v_{kl})$ zu $S = (u_{ik})$ konjugiert, d. h. es möge die Matrix T aus S durch Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen entstehen, so dafs also $T = \overline{S}$ und

$$(w_{il}) = S\overline{S} = \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \dots & u_{2n} \\ \vdots \\ u_{m1}, & u_{m2}, & \dots & u_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{21}, & \dots & u_{m1} \\ u_{12}, & u_{22}, & \dots & u_{m2} \\ \vdots \\ u_{1n}, & u_{2n}, & \dots & u_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

ist. Dann sind auch die Partialsysteme m^{ter} Ordnung von (v_{kl}) zu den entsprechenden von (u_{ik}) konjugiert und ihre Determinanten Δ_i den entsprechenden Determinanten D_i gleich. Dann erhält man also die Gleichung

$$|S\overline{S}| = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_\mu^2. \tag{7a}$$

Sind die Elemente von $S = (u_{ik})$ reelle Gröfsen, so ist also die Determinante des Systemes $|S \cdot \overline{S}|$ nur dann gleich Null, wenn alle seine Partialdeterminanten m^{ter} Ordnung verschwinden.

Es sei z. B.

$$S = \begin{pmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \overline{S} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2 \\ b_1, & b_2 \\ c_1, & c_2 \end{pmatrix},$$

so ist

$$|S\overline{S}| = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \end{vmatrix},$$

und man erhält die sehr häufig benutzte Identität

$$\begin{aligned} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &+ (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2. \end{aligned} \tag{7b}$$

Sind l_1 und l_2 zwei beliebige gerade Linien im Raume, und

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(l_1, x), & b_1 &= \cos(l_1, y), & c_1 &= \cos(l_1, z) \\ a_2 &= \cos(l_2, x), & b_2 &= \cos(l_2, y), & c_2 &= \cos(l_2, z) \end{aligned}$$

die Kosinus der Winkel, welche sie mit drei rechtwinkligen Koordinatenachsen bilden, so geht die linke Seite der Gleichung (7b) über in $1 - \cos^2(l_1 l_2) = \sin^2(l_1 l_2)$, und man erhält die Gleichung

$$\sin^2(l_1 l_2) = \Sigma(a_1b_2 - a_2b_1)^2. \tag{8}$$

Die rechte Seite verschwindet nur dann, wenn

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda$$

ist; und aus der Gleichung $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$ folgt $\lambda = \pm 1$. Es ist also nur dann $\sin(l_1 l_2) = 0$, wenn l_2 dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie l_1; diese Tatsache wird durch die geometrische Anschauung in Evidenz gesetzt.

§ 4.

Die soeben gefundenen Sätze wollen wir nun zur Untersuchung der mit einem Systeme zusammenhängenden sogenannten **abgeleiteten Systeme** benutzen. Die hier sich ergebenden Resultate bilden die Grundlage für die Theorie der Transformation der Systeme und Formen ineinander.

Es sei

$$(1) \qquad S = (u_{p,q}) \qquad (p, q = 1, 2, \dots n)$$

ein beliebiges System von n^2 Elementen. Der Fall, daſs S eine rechteckige Matrix ist, braucht nicht besonders untersucht zu werden, da die hier auszuführenden Operationen und die aus ihnen sich ergebenden Resultate auch für diese ihre volle Geltung behalten. Man kann die Untersuchung einer Matrix von m Zeilen und n Kolonnen ohne weiteres auf die eines quadratischen Systemes reduzieren, wenn man dieses durch Hinzufügung einer Anzahl von Zeilen oder Kolonnen, die lauter Nullen enthalten, zu einem quadratischen Systeme ergänzt.

Wir wollen nun in diesem Systeme $(n - r)$ nach Belieben gewählte Zeilen und ebensoviele Kolonnen unterdrücken. Dann bleibt ein System von r Horizontalreihen und ebensovielen Vertikalreihen übrig. Die Determinante dieses Systemes wird die folgende Form haben

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} u_{k_1 l_1}, & u_{k_1 l_2}, & \dots & u_{k_1 l_r} \\ u_{k_2 l_1}, & u_{k_2 l_2}, & \dots & u_{k_2 l_r} \\ \vdots & & & \\ u_{k_r l_1}, & u_{k_r l_2}, & \dots & u_{k_r l_r} \end{vmatrix},$$

wenn $(H_{k_1}, H_{k_2}, \dots H_{k_r} \mid V_{l_1}, V_{l_2}, \dots V_{l_r})$ die zugehörigen Horizontal- und Vertikalreihen sind.

Es sei die Zeilenkombination $(k_1, k_2, \dots k_r)$ in der natürlichen Reihenfolge aller Kombinationen der Zahlen $(1, 2, \dots n)$ zu je r die p^{te}, und ebenso sei die Kolonnenkombination $(l_1, l_2, \dots l_r)$ in der natürlichen Reihenfolge aller derartigen Kombinationen die q^{te}. Dann soll die obige Determinante r^{ter} Ordnung kurz durch

$$u_{p,q}^{(r)}$$

bezeichnet, und eine Unterdeterminante oder Partialdeterminante r^{ter} Ordnung des Systemes (u_{pq}) genannt werden.

Da die beiden Indizes p und q von $u^{(r)}_{p,q}$ unabhängig voneinander alle Zahlen der Reihe $1, 2, \dots n_r$ durchlaufen können, wenn

$$n_r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1 \, . \, 2 \; \dots \; r}$$

ist, so folgt, daſs ein System n^{ter} Ordnung genau $(n_r)^2$ Unterdeterminanten r^{ter} Ordnung $u^{(r)}_{p,q}$ besitzt. Wir wollen dieselben zu einem quadratischen Systeme

$$S^{(r)} = (u^{(r)}_{p,q}) \qquad (p, q = 1, 2, \dots n_r)$$

vereinigen und dieses das r^{te} abgeleitete System von $S = (u_{p,q})$ nennen. Der Einfachheit wegen bezeichnen wir die Indizes der Unterdeterminanten $u^{(r)}$ immer durch die gleichen Buchstaben p und q und geben in einer beigefügten Klammer die ganzen Zahlen an, welche p und q durchlaufen. Man erkennt dann, daſs ein System n^{ter} Ordnung genau n abgeleitete Systeme

$$S^{(1)}, S^{(2)}, \dots S^{(n)}$$

besitzt, deren Elemente die sämtlichen Unterdeterminanten erster, zweiter, ... n^{ter} Ordnung von S sind. Das erste abgeleitete System ist offenbar das System $S = (u_{p,q})$ selbst; wir wollen dasselbe daher auch mitunter durch $S^{(1)} = (u^{(1)}_{p,q})$ bezeichnen. Das letzte besteht nur aus einem Elemente; es ist identisch mit der Determinante $|u_{p,q}|$. Die Ordnungszahlen

$$n, \; \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2}, \; \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}, \dots 1$$

der n abgeleiteten Systeme sind mit dem Binomialkoeffizienten von n identisch.

Ist speziell

$$(u_{p,q}) = \begin{pmatrix} d, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & d, & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \dots & d \end{pmatrix} = ((d))$$

ein Diagonalsystem mit dem Diagonalelemente d, so erkennt man sofort, daſs in dem r^{ten} abgeleiteten Systeme $(u^{(r)}_{p,q})$ alle Diagonalelemente $u^{(r)}_{p,q} = d^r$, alle nicht in der Diagonale stehenden Elemente $u^{(r)}_{p,q}$ für $p \gtrless q$ aber gleich Null sind, weil in ihnen mindestens eine Zeile oder eine Kolonne lauter Nullen enthält, d. h. es ergibt sich die Gleichung

$$(u^{(r)}_{p,q}) = ((d^r)).$$

Ist also $d = 1$, so ergibt sich der Satz, daſs alle abgeleiteten Systeme eines Einheitssystemes wieder Einheitssysteme sind.

Ebenso findet man, daſs eine Matrix S von m Zeilen und n Kolonnen genau ν abgeleitete Matrizen

$$S^{(1)}, S^{(2)}, \dots S^{(\nu)}$$

besitzt, wenn ν die kleinere unter den beiden Zahlen m und n bedeutet. Während die Matrix $S^{(1)}$ m Zeilen und n Kolonnen hat, besteht offenbar das nächste System aus m_2 Zeilen und n_2 Kolonnen und allgemein enthält $S^{(r)}$ m_r Horizontal- und n_r Vertikalreihen.

Wir beweisen zunächst den Hauptsatz über die Komposition der abgeleiteten Systeme. Es seien

$$U = (u_{p,q}) \qquad \text{und} \qquad V = (v_{p,q})$$

zwei Systeme n^{ter} Ordnung und

$$W = (w_{p,q}) = (u_{p,q})(v_{p,q}) = UV \tag{3}$$

das Produkt derselben. Sind dann allgemein

$$U^{(r)}, \quad V^{(r)}, \quad W^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

die aus U, V und W abgeleiteten Systeme, so folgen aus der Gleichung (3) die n Gleichungen

$$W^{(r)} = U^{(r)} V^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \dots n). \tag{4}$$

Die letzte unter diesen Gleichungen für $r = n$ spricht das Multiplikationstheorem für die Determinanten n^{ter} Ordnung aus.

Um den allgemeinen Satz zu beweisen, betrachten wir irgend eine Unterdeterminante r^{ter} Ordnung $w^{(r)}_{p,q}$ des komponierten Systemes, deren Indizes p und q bezw. den Indexkombinationen

$$(k_1, k_2, \dots k_r) \qquad \text{und} \qquad (l_1, l_2, \dots l_r)$$

entsprechen mögen. Dann kann diese Determinante folgendermaſsen geschrieben werden

$$w^{(r)}_{p,q} = \begin{vmatrix} w_{k_1 l_1}, & w_{k_1 l_2}, & \dots & w_{k_1 l_r} \\ w_{k_2 l_1}, & w_{k_2 l_2}, & \dots & w_{k_2 l_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{k_r l_1}, & w_{k_r l_2}, & \dots & w_{k_r l_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{k_1} V'_{l_1}, & H_{k_1} V'_{l_2}, & \dots & H_{k_1} V'_{l_r} \\ H_{k_2} V'_{l_1}, & H_{k_2} V'_{l_2}, & \dots & H_{k_2} V'_{l_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{k_r} V'_{l_1}, & H_{k_r} V'_{l_2}, & \dots & H_{k_r} V'_{l_r} \end{vmatrix}.$$

Sie ist also die Determinante des aus den beiden rechteckigen Matrizen

$$(H_{k_1}, H_{k_2}, \dots H_{k_r}) = \begin{pmatrix} u_{k_1 1}, & u_{k_1 2}, & \dots & u_{k_1 n} \\ u_{k_2 1}, & u_{k_2 2}, & \dots & u_{k_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{k_r 1}, & u_{k_r 2}, & \dots & u_{k_r n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

und

$$(5a)\qquad (V'_{i_1}, V'_{i_2}, \ldots V'_{i_r}) = \begin{pmatrix} v_{1i_1}, & v_{1i_2}, & \ldots & v_{1i_r} \\ v_{2i_1}, & v_{2i_2}, & \ldots & v_{2i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{ni_1}, & v_{ni_2}, & \ldots & v_{ni_r} \end{pmatrix}$$

komponierten Systemes. Nach dem auf S. 317 bewiesenen Fundamentalsatze (6) ergibt sich somit für jene Determinante die Darstellung

$$w^{(r)}_{p,q} = D_1 \Delta_1 + D_2 \Delta_2 + \cdots + D_\mu \Delta_\mu \qquad (\mu = n_r),$$

wenn allgemein D_i und Δ_i die Unterdeterminanten r^{ter} Ordnung der beiden Matrizen $(H_{k_1}, \ldots H_{k_r})$ und $(V'_{i_1}, \ldots V'_{i_r})$ in (5) und (5a) in ihrer natürlichen Reihenfolge bedeuten. Nach unserer Bezeichnungsweise sind aber $(D_1, \ldots D_\mu)$ und $(\Delta_1, \ldots \Delta_\mu)$ bezw. identisch mit

$$(u^{(r)}_{p,1}, u^{(r)}_{p,2}, \ldots u^{(r)}_{p,\mu}) \qquad \text{und} \qquad (v^{(r)}_{1,q}, v^{(r)}_{2,q}, \ldots v^{(r)}_{\mu,q}),$$

denn die Unterdeterminanten der ersten Matrix haben den ersten Index p, da sie der p^{ten} Zeilenkombination $(k_1, k_2, \ldots k_r)$ entsprechen; und ebenso erkennt man, daſs den Unterdeterminanten der zweiten Matrix der zweite Index q zukommt. Also ist in der Tat

$$(6)\qquad w^{(r)}_{p,q} = u^{(r)}_{p,1} v^{(r)}_{1,q} + u^{(r)}_{p,2} v^{(r)}_{2,q} + \cdots + u^{(r)}_{p,\mu} v^{(r)}_{\mu,q},$$

d. h. es besteht die Kompositionsgleichung

$$(6a)\qquad (w^{(r)}_{p,q}) = (u^{(r)}_{p,q})(v^{(r)}_{p,q}),$$

welche mit (4) identisch ist.

Setzt man von vornherein U als rechteckige Matrix von m Zeilen und n Kolonnen und umgekehrt V als Matrix von n Zeilen und m Kolonnen voraus und bezeichnet mit W wieder das Kompositionsresultat UV, so gelten für die abgeleiteten Systeme genau dieselben Gleichungen

$$W^{(r)} = U^{(r)} V^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

und sie werden wörtlich ebenso bewiesen, wie dies soeben für quadratische Systeme geschah.

Neunzehnte Vorlesung.

Der *Laplace*sche Determinantensatz. — Die adjungierten Determinanten. — Die adjungierten und die reziproken Systeme. — Die *Jacobi*sche Determinantenrelation. — Anwendungen: Auflösung von m homogenen linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten für n Unbekannte. — Der Rang der Systeme. — Besitzt das Koeffizientensystem den Rang r, so sind $m-r$ von den m Gleichungen überflüssig. — Unabhängige Lösungen. — Darstellung aller Lösungen durch ein vollständiges System unabhängiger Lösungen. — Die nicht homogenen linearen Gleichungen. — Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs diese Gleichungen Lösungen haben.

§ 1.

Wir wollen jetzt das im § 2 der vorigen Vorlesung bewiesene Theorem benutzen, um den sogenannten *Laplace*schen Determinantensatz zu beweisen, welcher für uns die Grundlage für die Untersuchung der zwischen den abgeleiteten Systemen $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots S^{(n)}$ bestehenden Beziehungen bilden wird. Zu diesem Zwecke ersetzen wir zunächst jenes Fundamentaltheorem durch ein allgemeineres.

Wir betrachten ein quadratisches System (u_{gk}) von n^2 Elementen und teilen es in zwei Matrizen, von denen die erste aus r beliebig ausgewählten Horizontalreihen besteht, die zweite die $n-r$ übrigen enthält. Wir bezeichnen diese Matrizen kurz durch

$$(1) \qquad (u_{g^{(1)},k}) = (H_{g_1}, H_{g_2}, \dots H_{g_r}) = \begin{pmatrix} u_{g_1,1}, & u_{g_1,2}, & \dots\dots & u_{g_1,n} \\ u_{g_2,1}, & u_{g_2,2}, & \dots\dots & u_{g_2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{g_r,1}, & u_{g_r,2}, & \dots\dots & u_{g_r,n} \end{pmatrix}$$

und

$$(1\text{a}) \quad (u_{g^{(2)},k}) = (H_{g_{r+1}}, H_{g_{r+2}}, \dots H_{g_n}) = \begin{pmatrix} u_{g_{r+1},1}, & u_{g_{r+1},2}, & \dots u_{g_{r+1},n} \\ \vdots & & \\ u_{g_n,1}, & u_{g_n,2}, & \dots u_{g_n,n} \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen ein für allemal an, daſs die Horizontalreihen in jeder der beiden Matrizen in ihrer arithmetischen Reihenfolge aufeinander folgen, daſs also

$$g_1 < g_2 < \cdots < g_r \quad \text{und} \quad g_{r+1} < g_{r+2} < \cdots < g_n$$

ist; dann bilden also die n Zahlen $(g_1, \dots g_r; g_{r+1}, \dots g_n)$ zusammengenommen eine bestimmte Permutation der Zahlen $(1, 2, \dots n)$.

Wir untersuchen wieder alle Funktionen $\Theta(u_{gk})$, welche in Bezug auf ihre n^2 Elemente die beiden auf S. 309 angegebenen Eigenschaften besitzen. Da wir schon wissen, daſs sich dann $\Theta(u_{gk})$ von der Deter-

minante $|u_{gk}|$ nur durch eine multiplikative Konstante unterscheidet, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit statt $\Theta(u_{gk})$ gleich die Determinante $|u_{gk}|$ selbst wählen.

Da $|u_{gk}|$ jene beiden Eigenschaften sowohl in Bezug auf die Elemente der ersten Teilmatrix $(u_{g^{(1)},k})$ als auch in Bezug auf diejenigen der zweiten $(u_{g^{(2)},k})$ besitzt, so ist sie eine homogene lineare Funktion sowohl der Partialdeterminanten r^{ter} Ordnung von $(u_{g^{(1)},k})$ als auch der Partialdeterminanten $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung von $(u_{g^{(2)},k})$. Sind also

(2) $$D_1,\ D_2,\ \dots\ D_\mu \qquad (\mu = n_r)$$

und

(2a) $$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots\ \Delta_\mu$$

diese beiden Reihen von Partialdeterminanten in ihrer natürlichen Reihenfolge, so ergibt sich für $|u_{gk}|$ die Darstellung

(3) $$|u_{gk}| = \Sigma\Sigma\, C_{hh'} D_h \Delta_{h'},$$

in welcher die $C_{hh'}$ noch unbekannte konstante Koeffizienten sind.

Um den Koeffizienten $C_{hh'}$ für ein bestimmtes Indexsystem (h, h') zu finden, ersetzen wir das Variablensystem (u_{gk}) durch das speziellere $(\bar{u}_{gk})$, in welchem für die zu D_h und $\Delta_{h'}$ gehörigen Systeme die entsprechenden Einheitssysteme gesetzt sind, während alle übrigen Elemente gleich Null angenommen werden. Dann wird die rechte Seite von (3) gleich $C_{hh'}$, weil $D_h = \Delta_{h'} = 1$ wird und in allen anderen Produkten $D_i \Delta_{i'}$ mindestens eine der beiden Determinanten Null ist, weil sie mindestens eine aus lauter Nullen bestehende Vertikalreihe enthält. Haben nun zunächst D_h und $\Delta_{h'}$ auch nur eine Vertikalreihe gemeinsam, so ist die Anzahl der von Null verschiedenen Vertikalreihen von $(\bar{u}_{gk})$ kleiner als n, und daher ist die links stehende Determinante $|\bar{u}_{gk}| = 0$, weil auch sie dann mindestens eine aus lauter Nullen bestehende Vertikalreihe hat; dasselbe gilt demnach auch von diesem Koeffizienten $C_{hh'}$. Hieraus folgt, daſs in der Gleichung (3) die Summation nur auf diejenigen Produkte $D_h \Delta_{h'}$ auszudehnen ist, deren Systeme keine Vertikalreihe gemeinsam haben.

Ist also D_h eine der Unterdeterminanten der ersten Matrix $(u_{g^{(1)},k})$ und sind
$$V_{h_1},\ V_{h_2},\ \dots\ V_{h_r}$$
die zu ihr gehörigen Vertikalreihen, so entspricht ihr diejenige sogenannte komplementäre Determinante $\Delta_{h'}$ von $(u_{g^{(2)},k})$, deren $(n-r)$ Vertikalreihen
$$V_{h_{r+1}},\ V_{h_{r+2}},\ \dots\ V_{h_n}$$
von den obigen sämtlich verschieden sind, so daſs die n Indizes $(h_1, \dots h_r;\ h_{r+1}, \dots h_n)$ zusammengenommen ebenso wie vorher $(g_1, \dots g_r;\ g_{r+1}, \dots g_n)$ eine bestimmte Permutation der Zahlen

$(1, 2, \ldots n)$ bilden, wobei auch hier $(h_1, \ldots h_r)$ sowohl als auch $(h_{r+1}, \ldots h_n)$ ihrer Gröfse nach aufeinander folgen. Dann ist also

$$(4) \qquad D_h = \begin{vmatrix} u_{g_1 h_1}, & \ldots & u_{g_1 h_r} \\ u_{g_2 h_1}, & \ldots & u_{g_2 h_r} \\ \vdots & & \\ u_{g_r h_1}, & \ldots & u_{g_r h_r} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{h'} = \begin{vmatrix} u_{g_{r+1} h_{r+1}}, & \ldots\ldots & u_{g_{r+1} h_n} \\ \vdots & & \\ u_{g_n h_{r+1}}, & \ldots\ldots & u_{g_n h_n} \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun in der Identität (3) die Diagonalglieder von D_h und $\Delta_{h'}$ gleich Eins, d. h. setzt man

$$(5) \qquad u_{g_1 h_1} = u_{g_2 h_2} = \cdots = u_{g_n h_n} = 1$$

und alle anderen Elemente gleich Null und bezeichnet man dieses spezielle System $(\bar{u}_{gk})$ jetzt durch $E_{hh'}$, so ergibt sich die Gleichung

$$C_{hh'} = |E_{hh'}|,$$

und wir erhalten so die allgemeine Identität

$$(6) \qquad |u_{gk}| = \sum_{h=1}^{n_r} |E_{hh'}| D_h \Delta_{h'}.$$

Aus der Natur der Koeffizienten $|E_{hh'}|$ ersieht man sofort, dafs sie alle den Wert ± 1 haben, und man kann auch sehr leicht dieses Vorzeichen vollständig bestimmen. Zu diesem Zwecke bringen wir in dem Systeme $E_{hh'}$ durch Zeilenvertauschungen $H_{g_1}, H_{g_2}, \ldots H_{g_r}$ an die r ersten und $H_{g_{r+1}}, \ldots H_{g_n}$ an die $(n-r)$ letzten Stellen, und in gleicher Weise können wir dann durch Kolonnenvertauschungen $V_{h_1}, V_{h_2}, \ldots V_{h_r}$ an die r ersten, $V_{h_{r+1}}, \ldots V_{h_n}$ an die $(n-r)$ letzten Stellen bringen. Dadurch geht aber das System $E_{hh'}$ in das Einheitssystem E, seine Determinante also in Eins über; und da bei jeder solchen Reihenvertauschung die Determinante $|u_{gh}|$ ihr Zeichen ändert, so folgt, dafs $|E_{hh'}|$ gleich $+1$ oder gleich -1 ist, je nachdem die Gesamtanzahl jener Vertauschungen gerade oder ungerade ist.

Vertauschen wir nun zuerst H_{g_1} successive mit $H_{g_1-1}, H_{g_1-2}, \ldots H_1$, so tritt H_{g_1} nach $g_1 - 1$ Zeilenvertauschungen an die erste Stelle, ohne dafs sich hierdurch die arithmetische Reihenfolge der $n-1$ übrigen Zeilen geändert hat. Vertauscht man jetzt H_{g_2} successive mit $H_{g_2-1}, \ldots H_2$, so nimmt H_{g_2} nach $g_2 - 2$ Vertauschungen die zweite Stelle ein, während die $n-2$ übrigen Zeilen auch jetzt nach der Gröfse ihrer Indizes aufeinander folgen. Fahren wir in derselben Weise fort, so zeigt sich, dafs nach

$$(g_1 - 1) + (g_2 - 2) + \cdots + (g_r - r)$$

Zeilenvertauschungen $H_{g_1}, H_{g_2}, \ldots H_{g_r}$ die r ersten Stellen eingenommen haben, während die $n-r$ übrigen Zeilen von selbst nach der Gröfse

ihrer Indizes geordnet sind; diese sind daher bereits $H_{g_{r+1}}, \dots H_{g_n}$ in dieser Reihenfolge; durch jene Vertauschungen sind also die Horizontalreihen bereits in der verlangten Weise angeordnet.

Ebenso sieht man, daſs durch

$$(h_1 - 1) + (h_2 - 2) + \cdots + (h_r - r)$$

Kolonnenvertauschungen die Ordnung $(V_1, \dots V_r, V_{r+1}, \dots V_n)$ der Vertikalreihen in die vorher verlangte $(V_{h_1}, \dots V_{h_r}; V_{h_{r+1}}, \dots V_{h_n})$ übergeht, und da sich die Summe jener beiden Anzahlen von der Summe der beiden Zahlen

$$(7) \qquad G = (g_1 + \cdots + g_r), \quad H = (h_1 + \cdots + h_r)$$

nur um eine gerade Zahl unterscheidet, so ergibt sich

$$|E_{hh'}| = (-1)^{G+H}.$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$(8) \qquad |u_{gh}| = \sum_{h=1}^{n_r} (-1)^{G+H} D_h \Delta_{h'}.$$

Den Exponenten $G + H$ wollen wir den **Index der Determinante** D_h nennen. Ein Blick auf die Darstellung von D_h in (4) lehrt, daſs derselbe gleich der Indexsumme aller Diagonalglieder von D_h ist.

Aus der Symmetrie unserer Gleichung, in Bezug auf die beiden Teilmatrizen $(u_{g^{(1)},h})$ und $(u_{g^{(2)},h})$, folgt, daſs die obige Gleichung auch in der Form

$$(8a) \qquad |u_{gh}| = \sum_{h=1}^{n_r} (-1)^{G'+H'} D_h \Delta_{h'}$$

geschrieben werden kann, wo

$$(9) \qquad G' + H' = (g_{r+1} + \cdots + g_n) + (h_{r+1} + \cdots + h_n)$$

den Index der komplementären Determinante $\Delta_{h'}$ bedeutet. Da die Summe beider Indizes

$$(G + H) + (G' + H') = (g_1 + \cdots + g_n) + (h_1 + \cdots + h_n) = 2(1 + \cdots + n)$$

eine gerade Zahl ist, so erkennt man auch direkt, daſs die beiden Vorzeichen $(-1)^{G+H}$ und $(-1)^{G'+H'}$ einander gleich sind.

Endlich bemerke ich noch, daſs sich die Indizes h und h' je zweier komplementären Determinanten stets zu $\mu + 1$ ergänzen, wenn man beide Determinanten in ihrer natürlichen Reihenfolge numeriert, daſs nämlich die komplementären Determinanten zu

$$D_1, D_2, \dots D_\mu \qquad \text{bezw.} \qquad \Delta_\mu, \Delta_{\mu-1}, \dots \Delta_1$$

sind.

In der Tat, sind

(10) $\qquad (h_1, h_2, \ldots h_r) \quad$ und $\quad (h'_1, h'_2, \ldots h'_r)$

zwei Indexkombinationen, von denen die zweite nach unserer Definition der natürlichen Reihenfolge die spätere ist, also eine größere Ordnungszahl besitzt, so ist von den beiden komplementären Indexkombinationen

(10a) $\quad (h_{r+1}, h_{r+2}, \ldots h_n) \quad$ und $\quad (h'_{r+1}, h'_{r+2}, \ldots h'_n)$

umgekehrt die zweite die frühere, besitzt also eine kleinere Ordnungszahl. Bezeichnen wir jetzt nämlich die beiden ersten Indexkombinationen in (10) durch

(10b) $\quad (h_1, \ldots h_s, h_{s+1}, \ldots h_r) \quad$ und $\quad (h_1, \ldots h_s, h'_{s+1}, \ldots h'_r)$,

so daß also h_{s+1} und h'_{s+1} die beiden ersten voneinander verschiedenen Indizes sind, so ist nach unserer Annahme

$$h_{s+1} < h'_{s+1}.$$

Dann enthalten die beiden komplementären Kombinationen (10a) zuerst alle diejenigen Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots (h_{s+1} - 1)$ gemeinsam, welche nicht gleich einer der Zahlen $h_1, \ldots h_s$ sind. Auf diese folgt dann in der zweiten komplementären Kombination $(h'_{r+1}, \ldots h'_n)$ in (10a) unmittelbar die Zahl h_{s+1}, welche in der ersten Kombination (10a) nicht vorkommt; es ist also in der Tat die zweite komplementäre Indexkombination die frühere, was zu beweisen war.

§ 2.

Die im vorigen Abschnitte bewiesene *Laplace*sche Determinantenrelation kann als eine Beziehung zwischen zwei abgeleiteten Systemen $S^{(r)}$ und $S^{(r')}$ von (u_{gh}) aufgefaßt werden, deren Ordnungszahlen sich zu n ergänzen.

Es mögen nämlich zunächst g und g' die Ordnungszahlen sein, welche den komplementären Indexkombinationen

$$(g_1, g_2, \ldots g_r) \quad \text{und} \quad (g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots g_n)$$

der Teilmatrizen $(u_{g^{(1)},h})$ und $(u_{g^{(2)},h})$ in der natürlichen Reihenfolge derselben zukommen. Nach dem am Schlusse von § 1 bewiesenen Satze ist dann

$$g + g' = n_r + 1, \qquad g' = n_r - (g - 1).$$

Ebenso seien h und h' wie vorher die den komplementären Indexkombinationen $(h_1, \ldots h_r)$ und $(h_{r+1}, \ldots h_n)$ entsprechenden Ordnungszahlen.

Dann können die in (4) auf S. 325 durch D_h und $\Delta_{h'}$ bezeichneten Unterdeterminanten r^{ter} und r'^{ter} Ordnung jetzt durch $u^{(r)}_{gh}$ und $u^{(r')}_{g'h'}$ bezeichnet werden, da z. B. D_h diejenige Unterdeterminante r^{ter} Ordnung ist, welche der g^{ten} Zeilenkombination $(H_{g_1}, \ldots H_{g_r})$ und der h^{ten} Kolonnen-

kombination $(V_{h_1}, \dots V_{h_r})$ entspricht. Also schreibt sich die *Laplace*sche Determinantenrelation folgendermaßen

$$
(1) \qquad \begin{aligned} |u_{gh}| &= \sum_{h=1}^{n_r} (-1)^{G+H} u_{gh}^{(r)} u_{g'h'}^{(r')} \qquad \binom{r+r'=n}{g+g'=h+h'=n_r+1} \\ &= \sum_{h=1}^{n_r} (-1)^{G'+H'} u_{gh}^{(r)} u_{g'h'}^{(r')}. \end{aligned}
$$

Wir wollen nun die zuletzt abgeleitete Identität noch dadurch verallgemeinern, daſs wir in ihr die zu $(H_{g_1}, \dots H_{g_r})$ komplementäre Matrix $(H_{g_{r+1}}, \dots H_{g_n})$ durch eine aus $(n-r)$ anderen Horizontalreihen gebildete Matrix ersetzen. Es sei $(f_1, f_2, \dots f_r)$ eine von $(g_1, g_2, \dots g_r)$ verschiedene Indexkombination, und $(f_{r+1}, \dots f_n)$ die zu ihr komplementäre; es möge $(f_1, \dots f_r)$ in der arithmetischen Reihenfolge der Indexkombinationen r^{ter} Ordnung die f^{te}, und $(f_{r+1}, \dots f_n)$ in der Reihenfolge der Kombinationen $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung die f'^{te} sein; dann ist $f' = n_r + 1 - f$. Ersetzen wir nun in der obigen Identität die Zeilen $(H_{g_{r+1}}, \dots H_{g_n})$ der zweiten Matrix durch die Zeilen $(H_{f_{r+1}}, \dots H_{f_n})$, so treten rechts nur an die Stelle der Unterdeterminanten $u_{g'h'}^{(r')}$ der Matrix $(H_{g_{r+1}}, \dots H_{g_n})$ die entsprechenden Unterdeterminanten $u_{f'h'}^{(r')}$ der Matrix $(H_{f_{r+1}}, \dots H_{f_n})$. Auf der linken Seite verschwindet die neue Determinante

$$
|H_{g_1}, \dots H_{g_r};\ H_{f_{r+1}}, \dots H_{f_n}|
$$

identisch, da unter der hier gemachten Annahme mindestens eine der Horizontalreihen H_{f_i} mit einer Reihe H_{g_k} identisch ist, und unsere Gleichung geht daher über in

$$
(2) \qquad 0 = \sum_h (-1)^{G'+H'} u_{gh}^{(r)} u_{f'h'}^{(r')} \qquad (f \gtrless g).
$$

Wir wollen diese Gleichung noch mit $(-1)^{F'-G'}$ multiplizieren, wo $F' = f_{r+1} + \dots + f_n$ gesetzt wird, so daſs in ihr F' an die Stelle von G' tritt. Dann können wir diese und die vorher gefundenen Gleichungen (1) zusammengenommen in der Form schreiben

$$
(3) \qquad \sum_{h=1}^{n_r} (-1)^{F'+G'} u_{gh}^{(r)} u_{f'h'}^{(r')} = \delta_{fg} \cdot |S|,
$$

wo $|S| = |u_{gh}|$ und δ_{fg} Eins oder Null ist, je nachdem $f = g$ also $f' = g'$ ist, oder nicht.

§ 3.

Ist $u_{gh}^{(r)}$ eine beliebige Determinante r^{ter} Ordnung des Systemes (u_{ik}), so besitzt sie in der Entwickelung von $|S|$ nach dem *Laplace*schen Determinantensatze in (1) des vorigen Paragraphen den Koeffizienten

(1) $$(-1)^{G+H} u^{(r')}_{g'h'} = (-1)^{G'+H'} u^{(r')}_{g'h'},$$

so dafs die betreffende Determinante das positive oder das negative Vorzeichen hat, je nachdem die Summe der Diagonalindizes von $u^{(r)}_{gh}$, oder, was dasselbe ist, die von $u^{(r')}_{g'h'}$ gerade oder ungerade ist. Wir wollen diesen Koeffizienten (1) die zu $u^{(r)}_{gh}$ adjungierte Determinante nennen, und diese Beziehung so ausdrücken

(2) $$\text{adj. } u^{(r)}_{gh} = (-1)^{G+H} u^{(r')}_{g'h'}.$$

Ebenso ist auch umgekehrt

(2a) $$\text{adj. } u^{(r')}_{g'h'} = (-1)^{G'+H'} u^{(r)}_{gh}.$$

Betrachtet man also speziell ein System fünfter Ordnung

$$\begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & u_{15} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & u_{25} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34}, & u_{35} \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44}, & u_{45} \\ u_{51}, & u_{52}, & u_{53}, & u_{54}, & u_{55} \end{pmatrix},$$

so ist z. B.

$$\text{adj.} \begin{vmatrix} u_{22}, & u_{25} \\ u_{42}, & u_{45} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{13}, & u_{14} \\ u_{31}, & u_{33}, & u_{34} \\ u_{51}, & u_{53}, & u_{54} \end{vmatrix},$$

$$\text{adj. } u_{23} = - \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{14}, & u_{15} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{34}, & u_{35} \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{44}, & u_{45} \\ u_{51}, & u_{52}, & u_{54}, & u_{55} \end{vmatrix}.$$

Dann kann die allgemeine *Laplace*sche Determinantenrelation (3) auf voriger Seite folgendermafsen geschrieben werden

(3) $$\sum_{h=1}^{n_r} u^{(r)}_{gh} \text{ adj. } u^{(r)}_{fh} = \delta_{fg} |S|,$$

d. h. die Summe aller Produkte aus den Determinanten $u^{(r)}_{gh}$ einer Matrix $(H_{g_1}, \dots H_{g_r})$ und den entsprechenden adjungierten Determinanten einer Matrix $(H_{f_1}, \dots H_{f_r})$ ist gleich $|S|$ oder gleich Null, je nachdem jene beiden Matrizen $(H_{g_1}, \dots H_{g_r})$ und $(H_{f_1}, \dots H_{f_r})$ einander gleich oder voneinander verschieden sind.

Das System

$$(\text{adj. } u^{(r)}_{gh}) = ((-1)^{G'+H'} u^{(r')}_{g'h'}) \qquad (g', h' = n_r, n_r - 1, \dots 1)$$

stimmt, abgesehen von der Reihenfolge und dem Vorzeichen der Zeilen und Kolonnen, mit dem $(n-r)^{\text{ten}}$ abgeleiteten Systeme

$$S^{(r')} = \left(u^{(r')}_{pq}\right) \qquad (p, q = 1, 2, \dots n_r)$$

überein; denn um dieses System in jenes überzuführen, braucht man ja nur die Reihenfolge seiner Zeilen sowohl als auch die seiner Kolonnen umzukehren und dann jede Zeile $H_{g'}$ mit $(-1)^{G'}$, jede Kolonne $V_{h'}$ mit $(-1)^{H'}$ zu multiplizieren. Da durch diese für die Zeilen und Kolonnen symmetrischen Operationen das Vorzeichen der Determinante nicht geändert wird, so ergibt sich speziell

$$(4) \qquad |S^{(r')}| = |u^{(r')}_{pq}| = |\,\text{adj.}\, u^{(r)}_{pq}|.$$

Wir können die Gesamtheit aller $(n_r)^2$ *Laplace*schen Determinantenrelationen (3) auf S. 329 durch eine einzige Kompositionsgleichung zwischen drei Systemen der $(n_r)^{\text{ten}}$ Ordnung ersetzen, wenn wir an Stelle des Systemes $(\text{adj.}\,(u^{(r)}_{gh}))$ das konjugierte, d. h. dasjenige in die Betrachtung einführen, welches aus $(\text{adj.}\,(u^{(r)}_{gh}))$ durch Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen hervorgeht. Wir wollen im folgenden die zu $u^{(r)}_{gh}$ adjungierte Determinante immer durch $A^{(r)}_{hg}$ bezeichnen, so daſs also

$$(5) \qquad A^{(r)}_{hg} = \text{adj.}\, u^{(r)}_{gh} = (-1)^{G+H} u^{(r')}_{g'h'}$$

ist, und wir wollen das aus diesen $(n_r)^2$ Elementen gebildete System $((A^{(r)}_{pq}))$ das zu $(u^{(r)}_{pq})$ adjungierte System nennen. Dann können wir die *Laplace*schen Determinantenrelationen so schreiben

$$(6) \qquad \sum_{h=1}^{n_r} u^{(r)}_{gh} A^{(r)}_{hf} = \delta_{gf} |S|,$$

oder

$$(6\text{a}) \quad \begin{pmatrix} u^{(r)}_{11}, & u^{(r)}_{12}, & \dots u^{(r)}_{1n_r} \\ u^{(r)}_{21}, & u^{(r)}_{22}, & \dots u^{(r)}_{2n_r} \\ \vdots & & \\ u^{(r)}_{n_r1}, & u^{(r)}_{n_r2}, & \dots u^{(r)}_{n_rn_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(r)}_{11}, & A^{(r)}_{12}, & \dots A^{(r)}_{1n_r} \\ A^{(r)}_{21}, & A^{(r)}_{22}, & \dots A^{(r)}_{2n_r} \\ \vdots & & \\ A^{(r)}_{n_r1}, & A^{(r)}_{n_r2}, & \dots A^{(r)}_{n_rn_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |S|, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & |S|, & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \dots & |S| \end{pmatrix}.$$

Es ist also:

$$(6\text{b}) \qquad (u^{(r)}_{pq})(A^{(r)}_{pq}) = (|S|),$$

wenn unter $(|S|)$ ein Diagonalsystem von der Ordnung n_r verstanden wird, dessen Diagonalelemente sämtlich gleich $|S|$ sind. Da die Grundgleichung (1) auf S. 328 bei der Vertauschung der beiden Systeme $(u^{(r)}_{pq})$ und $(u^{(r')}_{g'h'})$ ungeändert bleibt, so folgt leicht, daſs auch umgekehrt

$$(6\text{c}) \qquad (A^{(r)}_{pq})(u^{(r)}_{pq}) = (|S|)$$

ist; die beiden Systeme $(u^{(r)}_{pq})$ und $(A^{(r)}_{pq})$ sind also miteinander vertauschbar.

Geht man in der Gleichung (6b) beiderseits zu den Determinanten über, und beachtet dabei, daſs die Determinante

$$|A_{pq}^{(r)}| = |u_{pq}^{(r')}|$$

ist, so ergibt sich

$$(7) \qquad |S^{(r)}| \cdot |S^{(r')}| = |u_{pq}^{(r)}|\,|u_{pq}^{(r')}| = |S|^{n_r}.$$

Da die Determinante $|S|$ nach dem auf S. 315 bewiesenen Satze eine irreduktible Funktion ihrer n^2 Elemente u_{ik} ist, so folgt aus dieser Gleichung, dafs

$$(7\text{a}) \qquad |u_{pq}^{(r)}| = \varepsilon\,|S|^{\varrho}, \quad |u_{pq}^{(r')}| = \varepsilon\,|S|^{\varrho'}$$

sein mufs, wo $\varepsilon = \pm 1$ und $\varrho + \varrho' = n_r$ ist. Zur Bestimmung des Vorzeichens ε und der Exponenten ϱ und ϱ' ersetzen wir das System (u_{ik}) durch ein Diagonalsystem (d), d. h. wir setzen

$$u_{ik} = d \cdot \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

wo d eine Variable bedeutet. Dann wird nach dem auf S. 320 unten bewiesenen Satze

$$|S| = d^n, \quad u_{pq}^{(r)} = d^r \delta_{pq}, \quad u_{pq}^{(r')} = d^{r'} \delta_{pq},$$

und

$$|u_{pq}^{(r)}| = d^{r \cdot n_r}, \qquad |u_{pq}^{(r')}| = d^{r' n_{r'}}.$$

Also ergibt sich mit Hilfe dieser Gleichungen aus (7a)

$$\varepsilon = +1, \qquad d^{r \cdot n_r} = d^{\varrho n}, \qquad d^{r' \cdot n_{r'}} = d^{\varrho' n},$$

$$\varrho = \frac{r}{n} \cdot n_r = (n-1)_{r-1}, \qquad \varrho' = (n-1)_{r'-1}.$$

Die Determinante des r^{ten} abgeleiteten Systemes $S^{(r)}$ ist also gleich der $(n-1)_{r-1}{}^{\text{ten}}$ Potenz der Determinante des zu Grunde gelegten Systemes S; die Determinanten der abgeleiteten Systeme sind also dann und nur dann gleich Null, wenn das gleiche für $|u_{ik}|$ selbst gilt.

Ist speziell $(u_{pq}^{(r)})$ das erste System

$$(u_{pq}^{(1)}) = (u_{pq}) = \begin{pmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \ldots & u_{1n} \\ u_{21}, & u_{22}, & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

so besteht das adjungierte System

$$(A_{pq}^{(1)}) = (A_{pq}) = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

aus allen n^2 Unterdeterminanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und zwar ist allgemein

$$A_{ik} = \text{adj.}\, u_{ki} = (-1)^{i+k} \frac{\partial |S|}{\partial u_{ki}},$$

d. h. die zu u_{ki} gehörige Unterdeterminante ist mit dem positiven oder dem negativen Zeichen zu versehen, je nachdem die Indexsumme $(i+k)$ gerade oder ungerade ist. Bezeichnet man die Stellen der n^2 Elemente von (A_{pq}) schachbrettartig durch weiſse und schwarze Felder, und zwar so, daſs A_{11} ein weiſses Feld entspricht, so erhalten die auf weiſsen bezw. schwarzen Feldern stehenden A_{ik} das positive bezw. das negative Zeichen.

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt speziell

$$|A_{pq}^{(1)}| = |S|^{n-1}. \tag{7b}$$

Dividieren wir die beiden Systeme von Determinantengleichungen

$$\Sigma u_{gh}^{(r)} A_{hf}^{(r)} = \Sigma A_{gh}^{(r)} u_{hf}^{(r)} = \delta_{fg} |S|$$

durch $|S|$, wobei wir $|S| \gtrless 0$ voraussetzen, und setzen dann zur Abkürzung

$$\frac{A_{hf}^{(r)}}{|S|} = u'^{(r)}_{hf}, \tag{8}$$

so ergeben sich für die Elemente dieses neuen Systemes

$$(u'^{(r)}_{pq}) = \left(\frac{A_{pq}^{(r)}}{|S|}\right) \qquad (p, q = 1, 2, \ldots n_r) \tag{8a}$$

die Gleichungen

$$\Sigma u_{gh}^{(r)} u'^{(r)}_{hf} = \Sigma u'^{(r)}_{gh} u_{hf}^{(r)} = \delta_{fg};$$

dieselben können in die Kompositionsgleichungen

$$(u_{pq}^{(r)})(u'^{(r)}_{pq}) = (u'^{(r)}_{pq})(u_{pq}^{(r)}) = E^{(r)} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots n_r) \tag{8b}$$

zusammengefaſst werden, in denen $E^{(r)}$ das Einheitssystem n_r^{ter} Ordnung (δ_{pq}) bedeutet.

Zu jedem der n abgeleiteten Systeme $(u_{pq}^{(r)})$ existiert also, falls nur die Determinante $|S|$ des ursprünglichen Systemes von Null verschieden ist, ein mit ihm vertauschbares System, welches mit ihm in beliebiger Reihenfolge komponiert das bezügliche Einheitssystem ergibt. Ein solches System soll auch in diesem allgemeinsten Falle ein zu $(u_{pq}^{(r)})$ reziprokes genannt werden (vergl. S. 138 flgd.). Ist $|S| \gtrless 0$, so zeigt sich hier, daſs man die Elemente eines reziproken Systemes zu $(u_{pq}^{(r)})$ findet, wenn man alle Elemente des adjungierten Systemes $(A_{pq}^{(r)})$ durch $|S|$ dividiert.

Wir beweisen gleich, daſs es zu einem Systeme S auſser dem hier gefundenen kein anderes reziprokes System gibt. Ist nämlich T das soeben charakterisierte reziproke System, für welches also

$$ST = TS = E \tag{9}$$

ist, und wäre etwa U ein zweites System, für welches auch

$$SU = E$$

ist, so folgt aus der Gleichung

$$SU = ST$$

durch vordere Komposition mit T und unter Berücksichtigung des fast selbstverständlichen aber bald noch genau zu beweisenden Satzes, dafs auch für Systeme n^{ter} Ordnung das assoziative Gesetz gilt [vergl. S. 60 und 137 (2)]

$$TSU = (TS)U = EU = U = (TS)T = T,$$

was zu beweisen war. Ist T das zu S reziproke System, so folgt jetzt aus der Symmetrie der Definitionsgleichung (9), dafs auch S reziprok zu T ist.

Ist dagegen $|u_{pq}|$ also auch $|u_{pq}^{(r)}|$ gleich Null, so gibt es überhaupt kein zu $(u_{pq}^{(r)})$ reziprokes System; denn für zwei reziproke Systeme folgt ja aus der Gleichung (9) durch Übergang zu den Determinanten

$$|u_{pq}^{(r)}| \cdot |u_{pq}'^{(r)}| = 1,$$

was unmöglich ist, wenn $|u_{pq}^{(r)}| = 0$ ist.

Wenden wir die soeben bewiesenen Sätze speziell auf das erste System $(u_{pq}^{(1)}) = (u_{pq})$ an, so ergibt sich das Theorem

Zu jedem Systeme (u_{pq}) von nicht verschwindender Determinante existiert ein einziges reziprokes System

$$(u_{pq}') = \left(\frac{A_{pq}}{|S|}\right), \tag{10}$$

dessen Elemente allgemein

$$u_{pq}' = \frac{1}{|S|} \cdot \frac{\partial |S|}{\partial u_{qp}} = \frac{\partial \log |S|}{\partial u_{qp}} \tag{10a}$$

sind. Die Determinante des reziproken Systemes ist offenbar gleich $\frac{1}{|S|}$.

Sind S und T zwei reziproke Systeme n^{ter} Ordnung, besteht also die Gleichung

$$ST = E, \tag{11}$$

so ergibt sich durch Übergang zu den abgeleiteten Systemen mit Hilfe des auf S. 321 bewiesenen Satzes unmittelbar

$$S^{(r)} T^{(r)} = E^{(r)}; \tag{11a}$$

denn aus der auf S. 320 unten gemachten Bemerkung folgt, dafs das r^{te} abgeleitete System zu dem Diagonalsysteme E das Einheitssystem $E^{(r)}$ der Ordnung n_r ist. Es besteht also der Satz:

Sind zwei Systeme S und T reziprok zueinander, so sind auch die einander entsprechenden abgeleiteten Systeme $S^{(r)}$ und $T^{(r)}$ zueinander reziprok.

Es sei nun $S = (u_{pq})$ ein beliebiges System n^{ter} Ordnung mit nicht verschwindender Determinante $|S|$ und (u'_{pq}) sein reziprokes System. Bezeichnet man dann durch

$$(u^{(r)}_{pq}) \quad \text{und} \quad (u'^{(r)}_{pq})$$

das r^{te} abgeleitete System bezw. von (u_{pq}) und (u'_{pq}), so besteht nach dem soeben bewiesenen Satze die Gleichung

$$(u^{(r)}_{pq})(u'^{(r)}_{pq}) = (E^{(r)}). \tag{12}$$

Ist aber anderseits

$$\left(\text{adj. } u^{(r)}_{pq}\right)$$

das zu $(u^{(r)}_{pq})$ adjungierte System, also $(\text{adj. } u^{(r)}_{qp})$ das konjugierte, so folgt aus der auf S. 330 bewiesenen Kompositionsgleichung (6a)

$$(u^{(r)}_{pq})(\text{adj. } u^{(r)}_{qp}) = (|S|);$$

dividiert man also alle Elemente von $(\text{adj. } u^{(r)}_{qp})$ und von $(|S|)$ durch $|S|$, so erhält man

$$(u^{(r)}_{pq})\left(\frac{\text{adj. } u^{(r)}_{qp}}{|S|}\right) = (E^{(r)}). \tag{12a}$$

Da somit nach (12) und (12a) beide Systeme

$$(u'^{(r)}_{pq}) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\text{adj. } u^{(r)}_{qp}}{|S|}\right) \tag{12b}$$

zu $(u^{(r)}_{pq})$ reziprok sind, so müssen sie identisch sein. Nun ist nach (10)

$$(u'_{pq}) = \left(\frac{A_{pq}}{|S|}\right).$$

Also gilt für die r^{ten} abgeleiteten Systeme die Gleichung

$$(u'^{(r)}_{pq}) = \left(\frac{A^{(r)}_{pq}}{|S|^r}\right), \tag{13}$$

und diese kann wegen (12b), nachdem man noch alle Elemente auf beiden Seiten mit $|S|^r$ multipliziert hat, folgendermaßen geschrieben werden

$$(A^{(r)}_{pq}) = (|S|^{r-1} \cdot \text{adj. } u^{(r)}_{qp}). \tag{13a}$$

Diese Gleichung zwischen zwei Systemen vertritt die folgenden $(n_r)^2$ Identitäten

$$A^{(r)}_{pq} = |S|^{r-1} \cdot \text{adj. } u^{(r)}_{qp} \qquad (p = p_1 \cdots p_r,\ q = q_1 \cdots q_r). \tag{13b}$$

Wir wollen zwei Unterdeterminanten r^{ter} Ordnung von zwei Systemen (A_{pq}) und (u_{pq}), welche gleiche Indizes i und k haben, **homologe Unterdeterminanten** nennen. Dann können wir den Inhalt der Gleichungen (13b) in dem folgenden zuerst von *Jacobi* bewiesenen Satze aussprechen.

> Eine Unterdeterminante r^{ter} Ordnung des Systemes (A_{pq}) ist gleich der zur homologen Determinante des Systemes (u_{qp}) adjungierten multipliziert mit der $(r-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Determinante $|u_{pq}|$.

Sind also

$$p = (p_1, \dots p_r), \quad q = (q_1, \dots q_r)$$

die den Werten p und q entsprechenden Indexsysteme und

$$p' = (p_{r+1}, \dots p_n), \quad q' = (q_{r+1}, \dots q_n)$$

die komplementären Systeme, so lautet die Identität (13b) ausgeschrieben folgendermaſsen

$$\text{(13c)} \quad \begin{vmatrix} A_{p_1 q_1}, & A_{p_1 q_2}, & \dots & A_{p_1 q_r} \\ A_{p_2 q_1}, & A_{p_2 q_2}, & \dots & A_{p_2 q_r} \\ \vdots & & & \\ A_{p_r q_1}, & A_{p_r q_2}, & \dots & A_{p_r q_r} \end{vmatrix} = (-1)^{P+Q} \cdot |S|^{r-1} \begin{vmatrix} u_{q_{r+1} p_{r+1}}, & \dots & u_{q_{r+1} p_n} \\ u_{q_{r+2} p_{r+1}}, & \dots & u_{q_{r+2} p_n} \\ \vdots & & \\ u_{q_n p_{r+1}}, & \dots & u_{q_n p_n} \end{vmatrix},$$

und durch einfachen Grenzübergang überzeugt man sich, daſs der Satz in dieser Form auch in dem Falle $|S| = 0$ gilt.

Für $r = 1$ erhält man so die Definitionsgleichungen für das adjungierte System (A_{pq}) selbst. Nimmt man $|S| = 0$ und $r \geqq 2$, so folgt aus den Gleichungen (13a)

$$(A_{pq}^{(r)}) = 0 \qquad (r = 2, 3, \dots n),$$

wenn man hier, wie stets im folgenden, unter einer Gleichung $S = 0$ versteht, daſs alle Elemente des Systemes S verschwinden.

> Besitzt also ein System (u_{pq}) die Determinante Null, so sind die aus dem adjungierten Systeme (A_{pq}) gebildeten Determinanten der zweiten, dritten, ... n^{ten} Ordnung sämtlich Null.

Wir können dieselbe Tatsache in anderer Form folgendermaſsen aussprechen:

> Ist die Determinante eines Systemes gleich Null, so sind in der adjungierten Determinante die entsprechenden Elemente je zweier Horizontalreihen einander proportional.

Sind nämlich in dem adjungierten Systeme (A_{pq}) nicht alle Elemente Null, und ist etwa $A_{11} \lessgtr 0$, so folgen ja aus den $(n-1)$ nach dem vorigen Satze bestehenden Gleichungen

$$A_{11}A_{2i} - A_{21}A_{1i} = 0 \qquad (i=2,\ldots n)$$

die $(n-1)$ Proportionen

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \cdots = \frac{A_{2n}}{A_{1n}},$$

und analog wird der Satz für die anderen Zeilen bewiesen. Daſs umgekehrt alle Determinanten zweiter, dritter, ... n^{ter} Ordnung von (A_{pq}) verschwinden, wenn die entsprechenden Elemente je zweier Zeilen jenes Systemes proportional sind, liegt auf der Hand.

§ 4.

Die bis jetzt gefundenen Resultate über die abgeleiteten und die reziproken Systeme wollen wir nun benutzen, um ein System von beliebig vielen linearen Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten auch in dem Falle vollständig aufzulösen, daſs die Koeffizienten nicht unbestimmte Gröſsen, sondern gegebene Zahlen sind. Genau ebenso wie auf S. 171 flgd. werden wir durch diese Frage unmittelbar zu dem wichtigen Begriffe des Ranges der Systeme hingeführt.

Auch hier wollen wir zunächst den Fall homogener linearer Gleichungen behandeln, auf den dann die Auflösung nicht homogener linearer Gleichungen leicht zurückgeführt werden kann.

Wir wollen ebenso, wie das a. a. O. geschah, unserer Aufgabe die folgende Form geben:

In welcher Weise wird die Variabilität der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die Bedingung beschränkt, daſs die m homogenen linearen Funktionen derselben

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

sämtlich verschwinden sollen?

Die Koeffizienten a_{pq} dieser Funktionen sollen jetzt beliebig gewählte bestimmte Zahlen sein.

Wir betrachten nun die aus diesen Koeffizienten gebildete Matrix

$$S = (a_{pq}) \qquad \binom{p=1,2,\ldots m}{q=1,2,\ldots n}$$

und zugleich die zugehörigen abgeleiteten Systeme $S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots$, wo allgemein

$$S^{(i)} = (a_{pq}^{(i)}) \qquad (i=1,2,\ldots)$$

ist und deren Anzahl nach der auf S. 321 oben gemachten Bemerkung gleich der kleineren unter den beiden Zahlen m und n ist. Dann kann der

Fall eintreten, daſs von diesen Systemen gewisse in der Weise verschwinden, daſs alle ihre Elemente Null sind.

Ist $S^{(\varrho)} = (a_{pq}^{(\varrho)}) = 0$, so erkennt man leicht, daſs alle folgenden abgeleiteten Systeme ebenfalls verschwinden. Sind nämlich alle Unterdeterminanten ϱ^{ter} Ordnung der Matrix (a_{pq}) Null, und entwickelt man irgend eine Unterdeterminante $(\varrho + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$a_{pq}^{(\varrho+1)} = \begin{vmatrix} a_{p_0 q_0}, & a_{p_0 q_1}, & \dots a_{p_0 q_\varrho} \\ a_{p_1 q_0}, & a_{p_1 q_1}, & \dots a_{p_1 q_\varrho} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p_\varrho q_0}, & a_{p_\varrho q_1}, & \dots a_{p_\varrho q_\varrho} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen irgend einer, etwa ihrer ersten Horizontalreihe, so sind die Koeffizienten der $(\varrho + 1)$ Elemente a_{p_0, q_i} Determinanten ϱ^{ter} Ordnung des Systemes $(a_{pq}^{(\varrho)})$, welche alle nach der Voraussetzung Null sind; und hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es sei nun in der Reihe der abgeleiteten Systeme

$$(a_{pq}^{(1)}), \quad (a_{pq}^{(2)}), \quad (a_{pq}^{(3)}), \dots$$

das r^{te},

$$S^{(r)} = (a_{pq}^{(r)})$$

das letzte nicht verschwindende, während das folgende $S^{(r+1)}$ und somit auch alle späteren Systeme Null sind. Dann wollen wir sagen, das Koeffizientensystem (a_{pq}) besitzt den Rang r. Ein solches System ist also dadurch charakterisiert, daſs mindestens eine seiner Determinanten r^{ter} Ordnung von Null verschieden ist, während alle seine Determinanten $(r + 1)^{\text{ter}}$ oder höherer Ordnung Null sind.

Wir können und wollen voraussetzen, daſs schon die erste Unterdeterminante r^{ter} Ordnung $a_{11}^{(r)}$ von Null verschieden ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, und es wäre etwa $a_{pq}^{(r)} \gtrless 0$, wo der Index p der Zeilenkombination $(p_1, p_2, \dots p_r)$ und q der Kolonnenkombination $(q_1, q_2, \dots q_r)$ entspricht, so können wir die Bezeichnung der Gleichungen $f_1, \dots f_m$ sowie die der Variablen $x_1, \dots x_n$ so verändern, daſs die Determinante $a_{pq}^{(r)}$ an die erste Stelle rückt. Die Elemente von $a_{pq}^{(r)}$ sind nämlich die Koeffizienten von $x_{q_1}, \dots x_{q_r}$ in den Funktionen $f_{p_1}, \dots f_{p_r}$. Numerieren wir also die Gleichungen so, daſs $f_{p_1}, \dots f_{p_r}$ die r ersten Stellen erhalten, und bezeichnen wir ferner die Unbekannten so, daſs $x_{q_1}, \dots x_{q_r}$ die r ersten werden, so ist bei dieser neuen Bezeichnung in der Tat $a_{11}^{(r)} \gtrless 0$.

Es sei also jetzt das Koeffizientensystem (a_{pq}) vom Range r und $a_{11}^{(r)} \gtrless 0$, so kann man, wie wir jetzt beweisen wollen, die $m - r$ letzten Funktionen $f_{r+1}, \dots f_m$ homogen und linear durch die r ersten darstellen, d. h. es bestehen $m - r$ Gleichungen

$$(2) \qquad f_i = \beta_{i1} f_1 + \beta_{i2} f_2 + \dots + \beta_{ir} f_r \qquad (i = r + 1, \dots m).$$

Ist das bewiesen, so folgt sofort, dafs durch das Gleichungssystem

$$f_1 = 0, \ldots f_r = 0, \; f_{r+1} = 0, \ldots f_m = 0$$

die Variabilität von $x_1, \ldots x_n$ in genau derselben Weise beschränkt wird, wie durch die r ersten Gleichungen

$$f_1 = 0, \ldots f_r = 0$$

allein, da jede Lösung des zweiten Systemes infolge der Gleichungen (2) auch die $m - r$ letzten Gleichungen des ersten befriedigt. Diese $m - r$ letzten sind also eine notwendige Folge der r ersten und können daher einfach fortgelassen werden.

Zum Beweise bilden wir die Determinante der $(r+1)^{\text{ten}}$ Ordnung

$$\text{(3)} \qquad \begin{vmatrix} f_1, & a_{11}, & a_{12}, & \ldots a_{1r} \\ f_2, & a_{21}, & a_{22}, & \ldots a_{2r} \\ \vdots & & & \\ f_r, & a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots a_{rr} \\ f_i, & a_{i1}, & a_{i2}, & \ldots a_{ir} \end{vmatrix},$$

wo f_i irgend eine der Funktionen $f_{r+1}, \ldots f_m$ bedeutet. Entwickeln wir die Determinante zunächst nach der ersten Vertikalreihe, so ergibt sich

$$\text{(3a)} \qquad f_1 A_{1i} + f_2 A_{2i} + \cdots + f_r A_{ri} + f_i A_0,$$

wo $A_{1i}, \ldots A_{ri}, A_0$ die zu $f_1, \ldots f_r, f_i$ gehörigen Unterdeterminanten r^{ter} Ordnung dieser Determinante sind, und wo der Koeffizient $A_0 = a_{11}^{(r)}$ nach der Voraussetzung sicher von Null verschieden ist.

Anderseits erkennt man aber sofort, dafs die obige Determinante (3) identisch verschwindet. Ersetzt man nämlich die linearen Funktionen f_h durch ihre Werte, so ergibt sich

$$|f_h, a_{h1}, \ldots a_{hr}| = |a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \cdots + a_{hn}x_n, a_{h1}, \ldots a_{hr}|$$
$$= x_1 |a_{h1}, a_{h1}, \ldots a_{hr}| + \cdots + x_r |a_{hr}, a_{h1}, \ldots a_{hr}| + \cdots + x_n |a_{hn}, a_{h1}, \ldots a_{hr}|,$$
$$(h = 1, 2, \ldots r, i)$$

und alle Koeffizienten von $x_1, \ldots x_n$ sind Null, die r ersten, weil sie Determinanten mit je zwei gleichen Vertikalreihen sind, die $n - r$ letzten, weil sie Determinanten $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Systemes $S^{(r+1)}$ sind, welche nach der Voraussetzung alle verschwinden. Also ist die lineare Funktion (3a) Null, und aus dieser Gleichung folgt

$$\text{(3b)} \qquad -f_i = f_1 \frac{A_{1i}}{A_0} + f_2 \frac{A_{2i}}{A_0} + \cdots + f_r \frac{A_{ri}}{A_0} \qquad (i = r+1, \ldots n),$$

wo der Nenner A_0 sicher von Null verschieden ist. Die n Funktionen $(f_1, \ldots f_r, f_{r+1}, \ldots f_n)$ sind also in der Tat durch die r ersten unter ihnen $(f_1, \ldots f_r)$ linear und homogen darstellbar.

Nennen wir wieder wie auf S. 12 zwei Systeme $(f_1, f_2, \ldots f_m)$ und $(g_1, g_2, \ldots g_n)$ von homogenen oder auch von nicht homogenen Linearformen **äquivalent**, wenn jede Form f_i homogen und linear durch $(g_1, \ldots g_n)$, und wenn umgekehrt auch jede Form g_k homogen und linear durch $(f_1, \ldots f_m)$ mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist, so kann das soeben gefundene Resultat in dem Satze ausgesprochen werden:

> Besitzt das Koeffizientensystem (a_{pq}) den Rang r, so ist das System $(f_1, \ldots f_r, \ldots f_m)$ von m Linearformen äquivalent einem jeden Partialsysteme $(f_1, \ldots f_r)$ von nur r unter diesen Funktionen, dessen Koeffizientensystem denselben Rang r besitzt.

Betrachten wir allgemeiner irgendwelche $r+1$ unter diesen m Linearformen und bezeichnen wir diese jetzt durch $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots f^{(r)}$ und ihre Koeffizienten durch

$$\begin{pmatrix} a_1^{(0)}, & \ldots\ldots & a_n^{(0)} \\ a_1^{(1)}, & \ldots\ldots & a_n^{(1)} \\ \vdots & & \\ a_1^{(r)}, & \ldots\ldots & a_n^{(r)} \end{pmatrix},$$

so ist ihr Koeffizientensystem entweder ebenfalls vom Range r oder von niedrigerem Range, da dasselbe ja aus gewissen $(r+1)$ Horizontalreihen $H^{(0)}, H^{(1)}, \ldots H^{(r)}$ der Matrix (a_{pq}) gebildet ist. Dann besteht auch für diese Funktionen stets eine Identität

$$A^{(0)}f^{(0)} + A^{(1)}f^{(1)} + \cdots + A^{(r)}f^{(r)} \equiv 0, \tag{4}$$

deren Koeffizienten $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots A^{(r)}$ nicht sämtlich Null sind. Ist nämlich der Rang des Systemes $(H^{(0)}, H^{(1)}, \ldots H^{(r)})$ gleich r, so folgt die Richtigkeit unserer Behauptung aus dem soeben bewiesenen Satze; ist jener Rang aber kleiner als r, so besteht die obige Gleichung schon für weniger als $(r+1)$ von diesen Funktionen, also a fortiori für diese selbst.

Ersetzt man in der Identität (4) die Linearformen $f^{(k)}$ durch ihre Ausdrücke $a_1^{(k)}x_1 + a_2^{(k)}x_2 + \cdots + a_n^{(k)}x_n$ und beachtet, daß dann die Koeffizienten der n Variablen x_ϱ für sich Null sind, so erhält man die folgenden n Gleichungen für die Elemente von $H^{(0)}, H^{(1)}, \ldots H^{(r)}$

$$A^{(0)}a_\varrho^{(0)} + A^{(1)}a_\varrho^{(1)} + \cdots + A^{(r)}a_\varrho^{(r)} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots n) \tag{4a}$$

oder in abgekürzter, leicht verständlicher Schreibweise

$$A^{(0)}H^{(0)} + A^{(1)}H^{(1)} + \cdots A^{(r)}H^{(r)} = 0. \tag{4b}$$

Den hieraus sich ergebenden Satz können wir, wie man leicht erkennt, in der folgenden Weise aussprechen:

Ist die Matrix (a_{pq}) vom Range r, so besteht zwischen den entsprechenden Elementen von je $r+1$ Horizontalreihen stets eine lineare homogene Gleichung von der Form (4a) oder (4b), deren Koeffizienten nicht sämtlich gleich Null sind.

§ 5.

Mit Hilfe der bis jetzt gefundenen Resultate wollen wir nun ein System von m homogenen linearen Gleichungen

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \qquad (i=1,2,\ldots m) \tag{1}$$

vollständig auflösen. Hierzu schicken wir einige Bemerkungen über die Lösungen solcher Gleichungen voraus. Es seien

$$\begin{aligned} H_1 &= (A_1,\ A_2,\ldots A_n) \\ H_2 &= (B_1,\ B_2,\ldots B_n) \end{aligned}$$

irgend zwei partikuläre Lösungen der Gleichung (1), so daſs sowohl

$$x_i = A_i \quad \text{als auch} \quad x_i = B_i \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

dieselben befriedigen. Wir denken uns diese Lösungen auch abgekürzt durch H_1 und H_2 bezeichnet. Dann folgt ohne weiteres, daſs die Zahlen

$$aH_1 + bH_2 = (aA_1 + bB_1,\ aA_2 + bB_2,\ldots aA_n + bB_n)$$

ebenfalls eine Lösung bilden, wenn a und b beliebige Zahlen sind.

Sind allgemeiner

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= (A_{11},\ A_{12},\ldots A_{1n}) \\ H_2 &= (A_{21},\ A_{22},\ldots A_{2n}) \\ &\vdots \\ H_\varrho &= (A_{\varrho 1},\ A_{\varrho 2},\ldots A_{\varrho n}) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ϱ partikuläre Lösungen der Gleichungen (1), und bedeuten $t_1, t_2, \ldots t_\varrho$ ϱ beliebige Konstanten, so folgt ebenso, daſs das Zahlensystem

$$(t_1 H_1 + \cdots + t_\varrho H_\varrho) = (t_1 A_{11} + \cdots + t_\varrho A_{\varrho 1}, \ldots t_1 A_{1n} + \cdots + t_\varrho A_{\varrho n}) \tag{2a}$$

auch eine Lösung von (1) bildet.

Mehrere partikuläre Lösungen

$$H_\varkappa = (A_{\varkappa 1},\ A_{\varkappa 2},\ldots A_{\varkappa n}) \qquad (\varkappa = 1,2,\ldots k) \tag{3}$$

der Gleichungen (1) sollen nun **unabhängig** heiſsen, wenn keine von ihnen durch die $k-1$ anderen in der Form (2a) darstellbar ist. Man erkennt nun leicht, daſs diese Lösungen dann und nur dann unabhängig sind, wenn der Rang der aus jenen k Horizontalreihen gebildeten Matrix

$$(H_1, H_2, \ldots H_k) = (A_{gh}) \qquad \binom{g=1,2,\ldots k}{h=1,2,\ldots n}$$

genau gleich k ist. Ist nämlich jener Rang kleiner als k, so besteht nach dem auf S. 340 oben ausgesprochenen Satze zwischen den entsprechenden Elementen von $H_1, \dots H_k$ eine homogene lineare Gleichung

$$t_1 H_1 + t_2 H_2 + \cdots + t_k H_k = 0, \tag{4}$$

deren Koeffizienten nicht sämtlich verschwinden; ist also z. B. $t_k \gtrless 0$, so folgt aus ihr die Gleichung

$$H_k = -\left(\frac{t_1}{t_k} H_1 + \cdots + \frac{t_{k-1}}{t_k} H_{k-1}\right), \tag{4a}$$

oder ausgeschrieben

$$A_{k\varrho} = -\left(\frac{t_1}{t_k} A_{1\varrho} + \cdots + \frac{t_{k-1}}{t_k} A_{k-1,\varrho}\right) \qquad (\varrho = 1, 2, \dots n), \tag{4b}$$

d. h. die k^{te} Lösung ist eine Folge der $k-1$ übrigen. Ist dagegen der Rang des Koeffizientensystemes (A_{gh}) gleich k, so können die n Gleichungen (4b) nicht bestehen, da aus ihnen eine Gleichung von der Form (4) folgen würde, deren Existenz mit der über den Rang von (A_{gh}) gemachten Annahme im Widerspruch steht.

Wir beweisen jetzt, daſs ein System (1), dessen Koeffizientensystem den Rang r besitzt, genau $n-r$ unabhängige Lösungen besitzt.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das System

$$(f_1, \dots f_r, f_{r+1}, \dots f_m)$$

von vornherein durch das ihm äquivalente $(f_1, \dots f_r)$ ersetzt und nehmen wieder die Variablen so bezeichnet an, daſs in den r Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = a_{11} x_1 + \cdots + a_{1r} x_r + a_{1r+1} x_{r+1} + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ f_r = a_{r1} x_1 + \cdots + a_{rr} x_r + a_{r,r+1} x_{r+1} + \cdots + a_{rn} x_n = 0 \end{array}\right. \tag{5}$$

die den r ersten Unbekannten entsprechende Determinante r^{ter} Ordnung

$$| a_{gh} | \qquad (g, h = 1, 2, \dots r) \tag{6}$$

von Null verschieden ist.

Wir ergänzen nun die aus den nr Koeffizienten a_{ik} gebildete Matrix durch Hinzufügung von $n-r$ geeignet gewählten Horizontalreihen $\overline{H}_{r+1}, \dots \overline{H}_n$ zu einem quadratischen Systeme

$$(a_{ik}) = \left(\begin{array}{l} a_{11}, \quad \dots\dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{r1}, \quad \dots\dots a_{rn} \\ \hline a_{r+1,1}, \dots\dots a_{r+1,n} \\ \vdots \\ a_{n1}, \quad \dots\dots a_{nn} \end{array}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \dots n) \tag{7}$$

von n^2 Elementen mit nicht verschwindender Determinante. Dies ist stets und zwar auf unendlich viele Weisen möglich; es genügt schon für das zu (a_{gh}) in (6) komplementäre System, d. h. für das letzte Partialsystem von $(\overline{H}_{r+1}, \dots \overline{H}_n)$ ein solches von nicht verschwindender Determinante, z. B. das zugehörige Einheitssystem zu wählen, und die r ersten Vertikalreihen von $(\overline{H}_{r+1}, \dots \overline{H}_n)$ durch Nullen auszufüllen; denn dann reduziert sich nach dem *Laplace*schen Determinantensatze $|a_{ik}|$ in (7) auf das Produkt von $|a_{gh}|$ in (6) und der komplementären Determinante.

Bilden wir nun das zu (a_{ik}) reziproke System

$$(8) \qquad (a'_{ik}) = \begin{pmatrix} a'_{11}, \dots a'_{1r}, & a'_{1,r+1}, \dots a'_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a'_{n1}, \dots a'_{nr}, & a'_{n,r+1}, \dots a'_{nn} \end{pmatrix},$$

so beweisen wir leicht, daſs die Elemente seiner $n - r$ letzten Vertikalreihen

$$(9) \qquad \left\{ \begin{matrix} a'_{1,r+1}, \dots a'_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a'_{n,r+1}, \dots a'_{nn} \end{matrix} \right.$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen der Gleichungen (5) bilden.

Aus den Eigenschaften reziproker Systeme folgt nämlich zunächst

$$H_i V'_k = a_{i1} a'_{1k} + a_{i2} a'_{2k} + \cdots + a_{in} a'_{nk} = \delta_{ik}.$$

Legt man also k irgend einen der Werte $r+1, r+2, \dots n$ bei und läſst dann i die Werte $1, 2, \dots r$ durchlaufen, so wird δ_{ik} stets gleich Null, weil $i < k$ ist, und man erkennt so, daſs die Elemente

$$(a'_{1k}, a'_{2k}, \dots a'_{nk}) \qquad (k = r+1, \dots n)$$

jeder dieser $n - r$ letzten Kolonnen $(V'_{r+1}, \dots V'_n)$ eine Lösung der Gleichungen (5) sind. Diese Lösungen sind aber auch linear unabhängig; denn wären alle Determinanten $(n - r)^{\text{ter}}$ Ordnung von

$$(V'_{r+1}, V'_{r+2} \dots V'_n)$$

in (8) gleich Null, so folgte aus dem *Laplace*schen Determinantensatze, daſs $|a'_{ik}| = 0$ sein müſste gegen unsere Voraussetzung. Diese $(n - r)$

Vertikalreihen bilden also wirklich ein System von $n - r$ unabhängigen Lösungen unserer Gleichungen.

Wir heben noch speziell als Folgerung aus diesem Satze das folgende Theorem hervor:

> Ein jedes System von m linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten besitzt, falls $m < n$ ist, mindestens eine wesentliche, d. h. von den trivialen ($x_i = 0$) verschiedene Lösung.

Ist nämlich der Rang des Koeffizientensystemes gleich r, so ist $r \leqq m < n$, und nach dem soeben bewiesenen Satze haben jene Gleichungen sicher $n - r$ linear unabhängige wesentliche Lösungen.

Mehr als $n - r$ unabhängige Lösungen können aber die Gleichungen (5) nicht haben. Sind nämlich

$$(10) \qquad \begin{cases} H_1 \qquad = (A_{11}, \qquad A_{12}, \qquad \ldots A_{1n}) \\ \vdots \\ H_{n-r+1} = (A_{n-r+1,1}, \; A_{n-r+1,2}, \ldots A_{n-r+1,n}) \end{cases}$$

$n - r + 1$ Lösungen, und bildet man eine aus ihr folgende Lösung

$$c_1 H_1 + \cdots + c_{n-r+1} H_{n-r+1} = (A_1, A_2, \ldots A_r, A_{r+1}, \ldots A_n),$$

so kann man über die $n - r + 1$ Konstanten $c_1, \ldots c_{n-r+1}$ so verfügen, daſs die $n - r$ letzten Zahlen $A_{r+1}, \ldots A_n$ sämtlich Null sind, weil nach dem soeben angegebenen Korollare die $n - r$ homogenen linearen Gleichungen $(A_{r+1} = 0, \ldots A_n = 0)$ mit den $n - r + 1$ Unbekannten $c_1, \ldots c_{n-r+1}$ stets eine wesentliche Lösung zulassen. Da aber die so sich ergebenden Zahlen $(A_1, \ldots A_r, 0, \ldots 0)$ die Gleichungen (5) befriedigen, so bestehen für die r ersten Zahlen $A_1, \ldots A_r$ die Gleichungen

$$\begin{gathered} a_{11} A_1 + \cdots + a_{1r} A_r = 0 \\ \vdots \\ a_{r1} A_1 + \cdots + a_{rr} A_r = 0, \end{gathered}$$

deren Koeffizientensystem (a_{gk}) nach der Voraussetzung eine von Null verschiedene Determinante hat. Also folgt aus ihnen, daſs auch

$$A_1 = \cdots = A_r = 0$$

ist, d. h., daſs zwischen den $n - r + 1$ Lösungen (10) die Gleichung

$$c_1 H_1 + \cdots + c_{n-r+1} H_{n-r+1} = 0$$

besteht. Daher bilden die vorher gefundenen Lösungen (9) wirklich ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen, aus der jede andere Lösung linear und homogen zusammengesetzt werden kann.

Somit ergibt sich das folgende Resultat:

Ist

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i=1,2,\dots m)$$

ein System von m linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten, dessen Koeffizientensystem $|a_{ik}|$ vom Range r ist, so sind gewisse $(m-r)$ unter diesen Gleichungen eine Folge der r übrigen, und können also fortgelassen werden.

Ein solches Gleichungssystem vom Range r besitzt dann genau $n-r$ linear unabhängige Lösungen, aus denen alle anderen homogen und linear zusammengesetzt werden können.

Man kann die vollständige Auflösung der r Gleichungen (5) noch in einer anderen Weise erhalten. Schreibt man sie nämlich in der folgenden Form

$$(11) \qquad a_{k1} x_1 + \cdots + a_{kr} x_r = -(a_{k,r+1} x_{r+1} + \cdots + a_{kn} x_n) \qquad (k=1,2,\dots r)$$

und setzt dann zur Abkürzung

$$a_{k0} = -(a_{k,r+1} x_{r+1} + \cdots + a_{kn} x_n) \qquad (k=1,2,\dots r),$$

so lassen sich die r linearen nicht homogenen Gleichungen

$$(11\text{a}) \qquad a_{k1} x_1 + \cdots + a_{kr} x_r = a_{k0}$$

nach $x_1, \dots x_r$ auflösen, weil die Determinante

$$|a_{kl}| \qquad (k,l=1,2,\dots r)$$

n. d. V. von Null verschieden ist. Ist nämlich

$$(a'_{kl}) \qquad (k,l=1,2,\dots r)$$

das zu (a_{kl}) reziproke System, so finden wir allgemein x_l, wenn wir die erste der Gleichungen (11a) mit a'_{1l}, die zweite mit $a'_{2l}, \dots$, die letzte mit a'_{rl} multiplizieren und dann alle Produkte addieren. Wegen der Fundamentaleigenschaften reziproker Systeme wird dann nämlich der Koeffizient von x_l gleich Eins, und alle anderen Unbekannten erhalten den Koeffizienten Null; es ergibt sich daher die vollständige Auflösung der Gleichungen in der Form

$$(12) \qquad \begin{aligned} x_l &= a'_{l1} a_{10} + \cdots + a'_{lr} a_{r0} \\ &= -\sum_{k=1}^{r} a'_{lk}(a_{k,r+1} x_{r+1} + \cdots + a_{kn} x_n) \end{aligned} \qquad (l=1,\dots n).$$

Ist also das Koeffizientensystem von m homogenen linearen Gleichungen mit n Unbekannten vom Range r, so bestimmen sich gewisse r unter den n Unbekannten eindeutig als homogene lineare Funktionen der $(n-r)$ übrigen, deren Werte völlig willkürlich angenommen werden können. Durch die Forderung,

dafs jene m Funktionen f_i verschwinden sollen, wird also die n fache Mannigfaltigkeit der n Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf eine $(n-r)$-fache herabgemindert.

Man erkennt leicht, dafs die in (12) angegebene vollständige Lösung ein spezieller Fall der in dem vorigen Satze auf S. 344 oben gefundenen Darstellung durch die $n-r$ linear unabhängigen Lösungen (9) ist. Der einfache Beweis dieser Behauptung mag dem Leser überlassen bleiben.

§ 6.

Aus diesem Resultate kann nun leicht der entsprechende Satz für den Fall von beliebig vielen nicht homogenen linearen Gleichungen

$$
(1) \qquad \begin{aligned} f_1 &= a_{10} + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ &\vdots \\ f_m &= a_{m0} + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned}
$$

hergeleitet werden. Wir gelangen dazu durch die folgende Betrachtung, welche für den Fall von drei Gleichungen bereits auf S. 176 flgd. angestellt wurde. Neben dem Systeme

$$
(a_{k0}, a_{k1}, \ldots a_{kn}) = (V_0, V_1, \ldots V_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots m)
$$

aller $m(n+1)$ Gleichungskoeffizienten wollen wir die Matrix

$$
(a_{k1}, \ldots a_{kn}) = \quad (V_1, \ldots V_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots m)
$$

der mn Koeffizienten von $x_1, \ldots x_n$ betrachten und ihren Rang beziehlich durch

$$
R(V_0; V_i) \quad \text{und} \quad R(V_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)
$$

bezeichnen. Dann ist offenbar stets

$$
R(V_i) \leqq R(V_0; V_i);
$$

da nämlich das erste System ein Teil des zweiten ist, so sind sicher alle Determinanten einer beliebigen ϱ^{ten} Ordnung von (V_i) Null, wenn alle Determinanten derselben Ordnung von $(V_0; V_i)$ verschwinden.

Ist nun zunächst der Rang jener beiden Systeme gleich, so können wir leicht zeigen, dafs genau derselbe Satz wie der soeben für homogene Gleichungen aufgestellte besteht. In der Tat, sei

$$
R(V_i) = R(V_0; V_i) = r,
$$

so enthält das System $(V_1, \ldots V_n)$ sicher mindestens eine nicht verschwindende Determinante r^{ter} Ordnung, und wir können wieder die m Gleichungen und die n Unbekannten von vornherein so bezeichnet voraussetzen, dafs die erste dieser Determinanten

$$
|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r)
$$

von Null verschieden ist, während alle Determinanten $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung des ganzen Systemes $(V_0, V_1, \dots V_n)$ Null sind. Dann zeigen wir genau ebenso wie vorher, daſs das System $(f_1, \dots f_r, \dots f_m)$ äquivalent ist dem Systeme $(f_1, \dots f_r)$, welches aus den r ersten Funktionen gebildet wird, und daſs durch Auflösung nach $x_1, \dots x_r$ der r ersten Gleichungen, welche in der Form geschrieben werden können

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ir}x_r = -(a_{i0} + a_{i,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{in}x_n) \quad (i=1,2,\dots r),$$

$x_1, \dots x_r$ linear, aber nicht homogen, durch $x_{r+1}, \dots x_n$ ausgedrückt werden.

Ist also der Rang r des vollen Systemes $(V_0; V_i)$ gleich dem des Systemes (V_i) der Koeffizienten von $(x_1, \dots x_n)$, so werden durch das Gleichungssystem gewisse r unter den Unbekannten linear, aber nicht homogen, durch die $(n-r)$ übrigen dargestellt.

Es sei jetzt zweitens

$$R(V_i) < R(V_0; V_i);$$

dann zeigt man leicht, daſs jene m Gleichungen (1) überhaupt nicht durch endliche Werte von $(x_1, \dots x_n)$ befriedigt werden können. Ist nämlich wieder

$$R(V_0; V_i) = r,$$

so denken wir uns auch hier die Gleichungen von vornherein so bezeichnet, daſs unter den Determinanten r^{ter} Ordnung aus dem Koeffizientensysteme der r ersten Funktionen $(f_1, \dots f_r)$ mindestens eine von Null verschiedene sich befindet. Dann beweisen wir zunächst genau so, wie dies auf S. 338 für homogene Gleichungen geschah, daſs die $(m-r)$ letzten Gleichungen $(f_{r+1} = 0, \dots f_m = 0)$ eine notwendige Folge der r ersten, mithin für die Beschränkung der Variabilität von $(x_1, \dots x_n)$ überflüssig sind.

Die r ersten linearen Funktionen schreiben wir nun in der folgenden Form

$$(2) \qquad \begin{aligned} f_1 &= a_{10} + g_1 \\ f_2 &= a_{20} + g_2 \\ &\vdots \\ f_r &= a_{r0} + g_r, \end{aligned}$$

wo allgemein die Gröſsen

$$(3) \qquad g_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i=1,2,\dots r)$$

homogene lineare Funktionen von $(x_1, \dots x_n)$ sind, für deren Koeffizientensystem der Rang nach der Voraussetzung kleiner als r ist. Nach dem soeben für homogene Funktionen bewiesenen Satze kann man also r nicht sämtlich verschwindende Zahlen $t_1, \dots t_r$ so finden, daſs

$$t_1 g_1 + t_2 g_2 + \cdots + t_r g_r \equiv 0 \tag{4}$$

ist. Multipliziert man also allgemein die i^{te} Funktion f_i in (2) mit t_i und addiert dann alle diese Produkte, so erhält man

$$t_1 f_1 + \cdots + t_r f_r = t_1 a_{10} + \cdots + t_r a_{r0}, \tag{4a}$$

wo die rechts stehende Konstante

$$C = t_1 a_{10} + \cdots + t_r a_{r0} \tag{5}$$

notwendig von Null verschieden ist. Wäre nämlich $C = 0$, so bestände zwischen den r Funktionen $f_1, \ldots f_r$ die identische Gleichung

$$t_1 f_1 + \cdots + t_r f_r = 0,$$

was, wie auf S. 341 oben bewiesen wurde, unmöglich ist, da ihr Koeffizientensystem nach der Voraussetzung den Rang r besitzt.

Jede Lösung der Gleichungen $f_1 = 0, \ldots f_r = 0$ müßte nach (4a) auch die Gleichung

$$t_1 f_1 + \cdots + t_r f_r = C$$

befriedigen, und dies ist offenbar unmöglich, da für sie die linke Seite jener Gleichung verschwindet, während die Konstante rechts von Null verschieden ist. Es ergibt sich also der Satz:

Ein System von m linearen nicht homogenen Gleichungen

$$f_i = u_{i0} + u_{i1} x_1 + \cdots + u_{in} x_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

besitzt dann und nur dann überhaupt eine Lösung, wenn

$$R(V_0;\ V_i) = R(V_i)$$

ist. Ist r der gemeinsame Rang jener beiden Koeffizientensysteme, so sind diese m Gleichungen äquivalent einem Systeme von nur r unter ihnen, und ihre Lösungen bilden eine $(n-r)$-fache Mannigfaltigkeit, da sich r der Unbekannten als lineare nicht homogene Funktionen der $(n-r)$ übrigen ergeben, welche ihrerseits völlig beliebig angenommen werden können.

Zwanzigste Vorlesung.

Das Rechnen mit Systemen oder Matrizen. — Diagonalsysteme. — Die elementaren Rechenoperationen für Matrizen. — Die Addition und die Subtraktion. — Die Multiplikation. — Grundgesetze für die Multiplikation der Systeme. — Die Division. — Die mit einer Matrix zusammenhängenden Systeme. — Das konjugierte und das reziproke System. — Die Systeme, deren Elemente rationale Funktionen einer Variablen sind.

§ 1.

Ebenso, wie dies in der dritten Vorlesung für die Systeme von drei Horizontalreihen geschah, wollen wir im folgenden die Matrizen von beliebig vielen Zeilen und Kolonnen einer genaueren Untersuchung unterwerfen, um die so gewonnenen Resultate dann auf die Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, auf die Untersuchung der höheren Mannigfaltigkeiten, ferner auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen, die höhere Zahlentheorie und auf andere Fragen anwenden zu können. Wir werden erst dann sehen, ein wie brauchbares Werkzeug die Determinante für die gesamte Mathematik ist. Hier ist es aber zunächst unsere Aufgabe, dieses wirksame Werkzeug auch handlich für den Gebrauch zu gestalten, und zu diesem Zwecke wollen wir jetzt Vorschriften für das Rechnen mit Systemen oder Matrizen aufstellen, durch welche der sonst notwendige zum Teil recht komplizierte Rechenapparat völlig entbehrlich wird. Wir werden sehen, daſs die Betrachtung der Matrizen nichts anderes ist, als eine Erweiterung der elementaren Arithmetik. Die hier darzulegenden Prinzipien sind eine Präzisierung und Fortbildung der bereits in der neunten Vorlesung für Systeme von neun Elementen durchgeführten Betrachtungen.

Wir wollen im folgenden die betrachteten Systeme

$$(a_{ik}),\quad (b_{ik}),\quad (c_{ik}),\ \ldots \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

stets durch einzelne Buchstaben, und zwar im allgemeinen durch die zugehörigen groſsen lateinischen Buchstaben

$$A,\quad B,\quad C, \ldots$$

bezeichnen. Die Anzahl der Elemente braucht nicht angegeben zu werden, denn wir wollen ein für allemal festsetzen, daſs, falls zwei Systeme A

und B etwa nicht gleich viele Zeilen (oder Kolonnen) haben sollten, dieser Defekt durch die Hinzufügung von Zeilen oder Kolonnen ausgeglichen werden soll, deren Elemente lauter Nullen sind. Bei derselben Festsetzung können wir auch die betrachteten Systeme stets als quadratisch voraussetzen, da wir eine rechteckige Matrix durch die entsprechende Hinzufügung von Null-Reihen zu einem quadratischen Systeme ergänzen können und wollen. Wir wollen daher im folgenden stets Systeme n^{ter} Ordnung, d. h. solche mit n^2 Elementen als gegeben annehmen.

Unter einer Gleichung

$$A = B$$

zwischen zwei Systemen verstehen wir, daſs jedes der n^2 Elemente von A dem entsprechenden Elemente von B gleich ist. Diese Gleichung ist also nur ein einfacherer Ausdruck für die n^2 Gleichungen

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Wir hatten bisher das Einheitssystem n^{ter} Ordnung

$$\begin{Bmatrix} 1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 1, & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \ldots & 1 \end{Bmatrix} = (\delta_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gleich E gesetzt. Wir werden diese Bezeichnung auch im folgenden, besonders in den Fällen beibehalten, daſs wir Systeme verschiedener Ordnung betrachten; wir werden die Einheitssysteme verschiedener Ordnung dann häufig durch Indizes unterscheiden, so daſs sie durch $E_1, E_2, \ldots$ bezeichnet sind. Wenn wir aber, wie in der vorliegenden allgemeinen Untersuchung, immer Systeme gleicher Ordnung betrachten, so können wir ohne Furcht vor Miſsverständnis das Einheitssystem durch die Zahl 1 bezeichnen. Allgemein wollen wir jedes „Diagonalsystem“

$$\begin{Bmatrix} a, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & a, & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \ldots & a \end{Bmatrix},$$

welches in der Diagonale dieselbe Zahl a enthält, durch die Zahl a bezeichnen. Hiernach müssen wir das System, dessen Elemente sämtlich gleich Null sind, durch 0 bezeichnen.

Dann sagt also die Gleichung

$$A = 0$$

aus, daſs alle n^2 Elemente a_{ik} des Systemes A gleich Null sind.

Wir wollen jetzt die elementaren Rechenoperationen für die Verbindung der hier betrachteten Systeme n^{ter} Ordnung so definieren, daſs jede Verbindung beliebig vieler Systeme mit ihrer Hilfe wieder ein ein- oder mehrdeutig bestimmtes System n^{ter} Ordnung ergibt.

Unter der Summe $A+B$ zweier Systeme

$$A=(a_{ik}) \quad \text{und} \quad B=(b_{ik})$$

wollen wir das System

$$A+B=(a_{ik}+b_{ik})$$

verstehen, dessen Elemente c_{ik} gleich der Summe der beiden entsprechenden Elemente a_{ik} und b_{ik} sind, und die Summen von mehr als zwei Systemen sollen in entsprechender Weise definiert werden. Für die so definierten Summen besteht dann das sogenannte **kommutative Gesetz**; es ist nämlich offenbar

$$A+B=B+A, \quad A+B+C=A+C+B,$$

ferner gilt auch das sogenannte **assoziative Gesetz**; es ist nämlich

$$A+(B+C)=(A+B)+C;$$

kurz es gelten alle für die Addition von Zahlen bestehenden Gesetze auch für die Addition von Systemen. Ebenso verstehen wir unter der Differenz zweier Systeme A und B das System

$$A-B=(a_{ik}-b_{ik})$$

und nennen A den Minuendus, B den Subtrahendus.

Sind speziell a und b zwei Diagonalsysteme mit den Diagonalgliedern a und b, so sind die beiden Systeme $a+b$ und $a-b$ nach dieser Definition wieder Diagonalsysteme mit den Elementen $a+b$ bezw. $a-b$; für die Addition und Subtraktion der Diagonalsysteme gelten also genau dieselben Sätze, wie für die entsprechenden Operationen mit den gewöhnlichen Zahlen.

Im folgenden werden wir auch mitunter Summen von unendlich vielen Systemen, d. h. unendliche Reihen

$$\mathsf{A}=A^{(0)}+A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots$$

in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen. Ist allgemein

$$A^{(\varrho)}=(a_{ik}^{(\varrho)}) \qquad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\ldots n \\ \varrho=0,1,2,\ldots\ldots \end{pmatrix},$$

so verstehen wir unter A das System

$$\mathsf{A}=\left(\sum_{\varrho=0}^{\infty} a_{ik}^{(\varrho)}\right);$$

nur setzen wir voraus, daſs alle n^2 unendlichen Reihen

$$\alpha_{ik} = a_{ik}^{(0)} + a_{ik}^{(1)} + \cdots$$

konvergieren. Alsdann hat das System $\mathsf{A} = (\alpha_{ik})$ einen völlig bestimmten Sinn.

Unter dem Produkte AB zweier Systeme

$$A = (a_{ik}) \quad \text{und} \quad B = (b_{kl})$$

wollen wir, wie schon auf S. 284 erwähnt wurde, das aus A und B in dieser Reihenfolge komponierte System

$$C = (c_{il})$$

verstehen, dessen Elemente durch die Gleichungen

$$c_{il} = a_{i1} b_{1l} + a_{i2} b_{2l} + \cdots + a_{in} b_{nl} = H_i V_l'$$

bestimmt sind, wenn H_i und V_l' wieder bezw. die Horizontalreihen des ersten und die Vertikalreihen des zweiten Systemes bedeuten.

Analog verstehen wir unter dem Produkte

$$D = ABC$$

von drei Systemen

$$A = (a_{ik}), \quad B = (b_{kl}), \quad C = (c_{lm}) \qquad (i, k, l, m = 1, 2, \ldots n)$$

dasjenige System

$$D = (d_{im}),$$

dessen n^2 Elemente durch die Gleichungen

$$d_{im} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lm} \qquad (i, m = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmt sind; die entsprechende Definition soll für das Produkt von mehr als drei Systemen gelten. Die Systeme A, B und C nennen wir die Faktoren jenes Produktes D.

Die Multiplikation oder Komposition der Systeme hat gewisse, aber nicht alle Eigenschaften mit der Multiplikation der Zahlen gemeinsam. Der wesentlichste Unterschied ist der, daſs für die Multiplikation der Systeme im allgemeinen n i c h t das kommutative Gesetz gilt, d. h. daſs im allgemeinen nicht $AB = BA$ ist. In der Tat ist ja jedes Element c_{il}' von BA durch die Gleichung

$$c_{il}' = b_{i1} a_{1l} + b_{i2} a_{2l} + \cdots + b_{in} a_{nl} = H_i' V_l$$

bestimmt, und es ist offenbar im allgemeinen $c_{il} \gtrless c_{il}'$. Aus diesem Grunde werden wir stets genau zu unterscheiden haben, ob A vorn oder hinten mit B multipliziert wird.

Sind A und B insbesondere so beschaffen, daſs $AB = BA$ ist, so heiſsen A und B v e r t a u s c h b a r. Dieser Fall tritt speziell dann ein, wenn $B = A$ ist. Wir wollen das Produkt AA durch A^2, das Pro-

dukt AAA durch A^3, allgemein das Produkt von ϱ Systemen A durch A^ϱ bezeichnen.

Sind ferner a und b zwei Diagonalsysteme mit den gleichbezeichneten Diagonalelementen, und gilt für die letzteren die Zahlengleichung $c = ab$, so folgt aus der Kompositionsregel für die Systeme, daſs auch das gleichbezeichnete Diagonalsystem c gleich dem Produkte der Systeme ab, oder auch gleich ba ist; zwei Diagonalsysteme sind also stets miteinander vertauschbar.

Ist allgemeiner A ein beliebiges und a ein Diagonalsystem, so ist nach der allgemeinen Kompositionsregel

$$aA = Aa = \begin{pmatrix} a a_{11}, & \ldots & a a_{1n} \\ \vdots & & \\ a a_{n1}, & \ldots & a a_{nn} \end{pmatrix},$$

d. h. ein Diagonalsystem ist mit jedem anderen Systeme vertauschbar.

Dagegen besteht für die Komposition der Systeme ebenso wie für die Multiplikation der Zahlen das sogenannte assoziative Gesetz. Ebenso nämlich, wie z. B.

$$3 . 7 . 2 = 21 . 2 = 3 . 14$$

ist, erhält man z. B. bei dem Produkte ABC dreier Systeme dasselbe Resultat, wenn man zuerst das Produkt AB bildet und dieses hinten mit C multipliziert, oder wenn man A hinten mit dem Kompositionsresultate von B und C komponiert, d. h. es ist

$$ABC = (AB) \cdot C = A \cdot (BC).$$

Die Richtigkeit dieser Tatsache ergibt sich, wenn man die Elemente d_{im} des Produktes $D = ABC$ in jeder der beiden Formen schreibt

$$d_{im} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) . c_{lm} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lm} \right),$$

und ganz ebenso beweist man allgemein, daſs man bei einem Produkte mehrerer Faktoren, dieselben ohne ihre Reihenfolge zu ändern beliebig in Gruppen zusammenfassen kann.

Endlich gilt für die Addition und die Multiplikation das sogenannte distributive Gesetz; sind nämlich A, B, C, D vier beliebige Systeme, so besteht die Gleichung

$$(A + B)(C + D) = AC + BC + AD + BD,$$

denn es ist

$$(a_{ik} + b_{ik})(c_{kl} + d_{kl}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kl} + b_{ik} c_{kl} + a_{ik} d_{kl} + b_{ik} d_{kl} \right).$$

Aus dieser Gleichung folgt speziell

$$A(C+D)=AC+AD$$
$$(A+B)C=AC+BC.$$

Sind endlich a und b Diagonalsysteme, so ergeben sich aus den bis jetzt entwickelten Sätzen die beiden Gleichungen

$$aAB=AaB$$
$$(aA+bB)C=aAC+bBC.$$

Sind A, B und C drei Systeme, zwischen denen die Gleichung

$$AB=C \tag{1}$$

besteht, und sind allgemein $A^{(\varrho)}$, $B^{(\varrho)}$, $C^{(\varrho)}$ die ϱ^{ten} abgeleiteten Systeme, d. h. die aus ihren Unterdeterminanten ϱ^{ter} Ordnung gebildeten Systeme, so folgen, wie auf S. 321 bewiesen wurde, aus (1) die n Gleichungen

$$A^{(\varrho)}B^{(\varrho)}=C^{(\varrho)} \qquad (\varrho=1,2,\dots n), \tag{1a}$$

und die entsprechenden Gleichungen gelten für Produkte von mehr als zwei Faktoren. Wählen wir speziell $\varrho=n$, so werden die abgeleiteten Systeme n^{ter} Ordnung gleich den Determinanten $|A|$, $|B|$, $|C|$, d. h. die Gleichung (1a) geht über in

$$|A|\cdot|B|=|C|. \tag{1b}$$

Das Produkt AB kann also nur dann gleich Null sein, wenn mindestens eine der beiden Determinanten $|A|$ oder $|B|$ verschwindet.

Ist allgemeiner einer der beiden Faktoren, etwa A, vom Range r, so ist das abgeleitete System nächst höherer Ordnung $A^{(r+1)}$ gleich Null, und aus der Gleichung (1a) ergibt sich für $\varrho=r+1$, daſs auch $C^{(r+1)}$ gleich Null ist, daſs also das System C entweder auch vom Range r oder von niedrigerem Range ist; und da derselbe Satz für Produkte von beliebig vielen Faktoren besteht, so erhalten wir das folgende Theorem:

> Der Rang eines Produktes $D=AB\cdots C$ ist höchstens gleich dem Range desjenigen Faktors, welcher den kleinsten Rang hat.

Wir werden diesen letzten Satz später sehr wesentlich verallgemeinern und präzisieren.

Sind A und B vertauschbar, ist also $AB=BA$, so folgt durch Übergang zu den abgeleiteten Systemen, daſs auch $A^{(\varrho)}B^{(\varrho)}=B^{(\varrho)}A^{(\varrho)}$, d. h. daſs auch alle abgeleiteten Systeme vertauschbar sind.

§ 2.

In der elementaren Arithmetik definiert man einen rationalen Bruch $x = \frac{b}{a}$ als diejenige Zahlgröfse, welche mit a multipliziert b gibt. Wir stellen uns jetzt für den Bereich der Systeme die folgende analoge Aufgabe, welche uns eine Definition für die Division zweier Systeme liefern wird:

Es sollen diejenigen Systeme X gefunden werden, welche die Gleichung

$$AX = B \tag{1}$$

befriedigen, wenn A und B beliebig gegebene Systeme bedeuten.

Wir betrachten diese Aufgabe zunächst nur in dem Falle, dafs die Determinante von A nicht verschwindet; dann zeigt man leicht, dafs diese Gleichung stets eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Wählen wir nämlich zunächst für B das Einheitssystem, so zeigten wir bereits auf S. 332 flgd., dafs die spezielle Gleichung

$$AX = 1 \tag{1a}$$

die eindeutig bestimmte Lösung $X = A^{-1}$ besitzt, wenn wieder A^{-1} das zu A reziproke System bedeutet, und dafs dieses stets und nur dann existiert, wenn $|A| \gtrless 0$ ist. Wir werden im folgenden dieses reziproke System mitunter durch $\frac{1}{A}$ bezeichnen. Da dasselbe nach (9) auf S. 332 mit A vertauschbar ist, so bestehen die Gleichungen

$$A \cdot \frac{1}{A} = \frac{1}{A} \cdot A = 1.$$

Mit Hilfe dieses Resultates können wir nun die allgemeinere Gleichung (1) leicht auflösen. Multiplizieren wir nämlich beide Seiten vorn mit dem reziproken Systeme $\frac{1}{A}$, so erhält man für X die dieses System eindeutig bestimmende Gleichung

$$X = \frac{1}{A} \cdot B = A^{-1} B.$$

Unter derselben Annahme $|A| \gtrless 0$ kann auch die andere Gleichung

$$YA = B$$

nach Y aufgelöst werden; sie gibt für Y die eindeutig bestimmte Lösung

$$Y = B \cdot \frac{1}{A} = BA^{-1}.$$

Im allgemeinen sind diese beiden Systeme X und Y voneinander verschieden, es sei denn, daſs B und A miteinander vertauschbar sind. Ist nämlich

$$AB = BA,$$

und multipliziert man diese Gleichung vorn und hinten mit $\frac{1}{A}$, so folgt

$$B \cdot \frac{1}{A} = \frac{1}{A} \cdot B.$$

Nur in diesem Falle können und wollen wir den gemeinsamen Wert dieses Produktes ebenso wie in der elementaren Arithmetik gleich

$$\frac{B}{A}$$

setzen und ihn als den Quotienten der beiden Systeme B und A bezeichnen. B heiſst dann der Zähler, A der Nenner dieses Quotienten.

Sind also B und A vertauschbare Systeme, und ist $|A| \gtrless 0$, so gibt es ein und nur ein System $\frac{B}{A}$, für welches die beiden Gleichungen

$$A \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{A} \cdot A = B$$

erfüllt sind.

Ist $C = \frac{B}{A}$, ist also $AC = CA = B$, so folgt durch Übergang zu den abgeleiteten Systemen, daſs auch

$$A^{(\varrho)} C^{(\varrho)} = C^{(\varrho)} A^{(\varrho)} = B^{(\varrho)}$$

ist; und da nach dem auf S. 331 bewiesenen Satze aus $|A| \gtrless 0$ auch $|A^{(\varrho)}| \gtrless 0$ folgt, so ergibt sich, daſs

$$C^{(\varrho)} = \left(\frac{B}{A}\right)^{(\varrho)} = \frac{B^{(\varrho)}}{A^{(\varrho)}}$$

ist. Das abgeleitete System ϱ^{ter} Ordnung eines Quotienten ist also gleich dem Quotienten der abgeleiteten Systeme gleicher Ordnung von Zähler und Nenner.

Ist dagegen die Determinante $|A| = 0$, so braucht die Gleichung (1) nicht notwendig eine Lösung zu haben; ist dies aber der Fall, so hat sie deren unendlich viele. Ist nämlich A vom Range r, so daſs also das $(r+1)^{\text{te}}$ abgeleitete System $A^{(r+1)}$ gleich Null ist, so folgt ja aus der als bestehend vorausgesetzten Gleichung (1), daſs auch

$$A^{(r+1)} X^{(r+1)} = B^{(r+1)}$$

ist, daſs also in diesem Falle auch das System $B^{(r+1)}$ gleich Null sein muſs. Die Gleichung (1) ist also nur dann lösbar, wenn der Rang von B gleich oder kleiner als der Rang von A ist. Auf die Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung (1) soll später noch genauer eingegangen werden.

Ist die Gleichung $AX = B$ aber möglich, und sind X_1 und X_2 etwa zwei Lösungen derselben, so folgt aus den beiden Gleichungen

$$AX_1 = B \quad \text{und} \quad AX_2 = B$$

durch Subtraktion

$$A(X_1 - X_2) = 0,$$

d. h. sind X_1 und X_2 irgend zwei Lösungen dieser Gleichung, so ist ihre Differenz eine Lösung der Gleichung

$$AX^{(0)} = 0. \tag{2}$$

Man findet also alle Lösungen der Gleichung (1), wenn man zu irgend einer unter ihnen alle Lösungen der Gleichung (2) addiert; es ist daher nur nötig diese letztere Gleichung genauer zu untersuchen.

Hier tritt uns nun ein zweiter wesentlicher Unterschied zwischen dem Rechnen mit Zahlen und dem Rechnen mit Systemen entgegen. Während nämlich ein Produkt zweier oder mehrerer Zahlen nur dann Null sein kann, wenn mindestens einer seiner Faktoren verschwindet, gilt dasselbe für ein Produkt zweier Systeme nur dann, wenn das eine von ihnen eine von Null verschiedene Determinante hat. Ist nämlich $|A| = 0$, so kann das Produkt AX gleich Null sein, ohne daſs A oder X verschwindet.

In der Tat folgt aus der Gleichung

$$(a_{ik})(x_{kl}) = (H_i V_l') = 0,$$

daſs die unbekannten Elemente $(x_{l1}, x_{l2}, \dots x_{ln})$ einer jeden Vertikalreihe V_l' des Systemes X Lösungen der n homogenen linearen Gleichungen

$$H_1 V_l' = 0, \; H_2 V_l' = 0, \dots H_n V_l' = 0 \qquad (l = 1, 2, \dots n),$$

oder der Gleichungen

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = 0 \end{matrix} \tag{3}$$

sein müssen. Ist nun der Rang von A gleich r, so besitzen diese Gleichungen nach dem auf S. 344 bewiesenen Satze genau $n - r$ unabhängige Lösungen, aus denen sich alle anderen homogen und linear zusammensetzen lassen. Wir denken uns ein solches System gebildet und schreiben es als eine Matrix von $n - r$ Kolonnen

$$\begin{matrix} x_{11}^{(0)}, & \dots\dots & x_{1,n-r}^{(0)} \\ \vdots & & \\ x_{n1}^{(0)}, & \dots\dots & x_{n,n-r}^{(0)}; \end{matrix} \tag{4}$$

so daſs jede der $n-r$ Vertikalreihen $V_1^{(0)}, \ldots V_{n-r}^{(0)}$ einer jener unabhängigen Lösungen entspricht. Ergänzen wir diese Matrix durch Hinzufügung von r aus lauter Nullen bestehenden Kolonnen zu einem quadratischen Systeme $X^{(0)}$ von n^2 Elementen $x_{ik}^{(0)}$, so ist $X^{(0)}$ ein System vom Range $n-r$, welches die Gleichung

$$AX^{(0)} = 0$$

befriedigt. Multipliziert man diese Gleichung noch hinten mit einem beliebigen Systeme $P = (p_{kl})$, so erhält man

$$A(X^{(0)}P) = 0,$$

d. h. jedes System

$$X = X^{(0)}P \quad \text{oder} \quad (x_{il}) = (x_{ik}^{(0)})(p_{kl})$$

genügt dieser Gleichung ebenfalls. Endlich erkennt man leicht, daſs das Produkt $X^{(0)}P$ die allgemeinste Lösung jener Gleichung darstellt. Soll nämlich $X = (x_{il})$ eine Lösung der Gleichung $AX = 0$ sein, so müssen die Elemente $(x_{1l}, \ldots x_{nl})$ je einer Vertikalreihe die Gleichungen (3) befriedigen; sie müssen daher homogen und linear aus den entsprechenden Elementen der Matrix (4) mit beliebigen Koeffizienten zusammengesetzt sein. Also müssen für jede solche Vertikalreihe Gleichungen bestehen, welche auch folgendermaſsen geschrieben werden können

$$x_{il} = x_{i1}^{(0)}p_{1l} + \cdots + x_{i,n-r}^{(0)}p_{n-r,l} + 0 \cdot p_{n-r+1,l} + \cdots + 0 \cdot p_{nl} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo die Elemente p_{hl} beliebige Konstanten bedeuten. Diese n^2 Gleichungen können aber durch die eine

$$(x_{il}) = (x_{ik}^{(0)})(p_{kl})$$

ersetzt werden; unsere Behauptung ist daher vollständig bewiesen.

Es gilt also der Satz:

> Die Gleichung $AX = 0$ besitzt, wenn A vom Range r ist, eine Lösung $X^{(0)}$ von dem komplementären Range $n-r$, und die allgemeinste Lösung derselben Gleichung geht aus $X^{(0)}$ durch hintere Komposition mit einem beliebigen Systeme P hervor.

Zusammenfassend können wir also sagen, daſs man Systeme genau ebenso addieren, subtrahieren, multiplizieren und mit ihnen, falls ihre Determinante nicht Null ist, dividieren darf, wie mit gewöhnlichen Zahlen, und daſs hierbei alle in der elementaren Arithmetik gestatteten Umformungen und Vereinfachungen ebenfalls erlaubt sind. Nur darf man erstens im allgemeinen die Reihenfolge der einzelnen Multiplikationen und Divisionen nicht vertauschen, und zweitens darf man aus

dem Verschwinden eines Produktes nicht auf das Verschwinden eines seiner Faktoren schliefsen, es sei denn, dafs die übrigen Faktoren von Null verschiedene Determinanten haben.

§ 3.

Mit jedem Systeme A hängen gewisse andere Systeme, nämlich das konjugierte und das reziproke System nahe zusammen. Wir nennen hier wie auf S. 144 das System $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$, welches aus A durch Vertauschung der Zeilen mit den Kolonnen hervorgeht, das zu A konjugierte oder das transponierte System. Nach dieser Definition ist also einfach

$$\bar{a}_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n).$$

Konjugierte Systeme haben offenbar gleichen Rang und gleiche Determinanten. Sind ferner A und $\bar{A}$ konjugiert, so sind auch die entsprechenden abgeleiteten Systeme $A^{(\varrho)}$ und $\bar{A}^{(\varrho)}$ konjugiert. Das konjugierte System zu aA ist $a\bar{A}$; das konjugierte System zu einer Summe $A + B$ ist gleich der Summe $\bar{A} + \bar{B}$ der konjugierten Systeme. Das zu $\bar{A}$ konjugierte System ist wieder das ursprüngliche System. Endlich erkennt man leicht, dafs das konjugierte System zu dem ϱ^{ten} abgeleiteten Systeme $A^{(\varrho)}$ gleich dem ϱ^{ten} abgeleiteten Systeme $\bar{A}^{(\varrho)}$ von $\bar{A}$ ist.

Ein System $S = (s_{ik})$ heifst symmetrisch, wenn es seinem konjugierten Systeme gleich, wenn also

$$s_{ik} = s_{ki}$$

ist. Ist A ein beliebiges System, $\bar{A}$ das ihm konjugierte, so ist die Summe

$$S = A + \bar{A} = (a_{ik} + a_{ki})$$

offenbar stets symmetrisch.

Ein System $A = (a_{ik})$ heifst alternierend, wenn

$$\bar{A} = -A,$$

d. h.

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

ist, wenn es also bei der Vertauschung seiner Zeilen und Kolonnen nur das Vorzeichen ändert. In einem alternierenden Systeme sind alle Diagonalelemente offenbar gleich Null. Sind $A = (a_{ik})$ und $\bar{A} = (a_{ki})$ zwei beliebige konjugierte Systeme, so ist die Differenz

$$A - \bar{A} = (a_{ik} - a_{ki})$$

stets ein alternierendes System.

Jedes System A kann hiernach stets auf eine und nur auf eine Weise als Summe eines symmetrischen und eines alternierenden Systemes, nämlich in der Form

$$A = \frac{1}{2}(A + \bar{A}) + \frac{1}{2}(A - \bar{A})$$

dargestellt werden.

Ist

$$C = AB,$$

also

$$c_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl},$$

und ist $\bar{C} = (\bar{c}_{il})$ das zu C konjugierte System, so wird

$$\bar{c}_{il} = c_{li} = \Sigma a_{lk} b_{ki} = \Sigma \bar{b}_{ik} \bar{a}_{kl},$$

d. h. es besteht die Gleichung

$$\bar{C} = \bar{B}\bar{A};$$

der entsprechende Satz für Produkte von drei und mehr Faktoren wird genau ebenso bewiesen.

> Ist also $C = AB \cdots D$ ein Produkt beliebig vieler Systeme, so ist das konjugierte System $\bar{C}$ gleich dem Produkte der konjugierten Faktoren, aber in umgekehrter Reihenfolge.

Sind zwei Systeme A und B miteinander vertauschbar, so folgt aus der Gleichung $AB = BA$ durch den Übergang zu den Konjugierten

$$\bar{B}\bar{A} = \bar{A}\bar{B};$$

alsdann sind also die konjugierten Systeme ebenfalls vertauschbar.

Ist A ein beliebiges System, $\bar{A}$ das konjugierte, so ist das Produkt

$$S = A\bar{A}$$

symmetrisch, weil nach dem soeben bewiesenen Satze $\bar{S} = S$ ist. Bezeichnet man die Horizontalreihen von A, also auch die Vertikalreihen von $\bar{A}$ durch $(H_1, \ldots H_n)$, so ist $A\bar{A} = (H_i \cdot H_k)$. Hieraus folgt, daſs das Produkt $A\bar{A}$, falls die Elemente von A reelle Zahlen sind, nur dann gleich Null ist, wenn $A = \bar{A} = 0$ ist; denn die Diagonalglieder

$$H_i \cdot H_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

sind nur dann alle Null, wenn alle Elemente a_{ik} verschwinden. Da ferner

$$S^{(\varrho)} = A^{(\varrho)} \bar{A}^{(\varrho)}$$

ist, so folgt genau ebenso, daſs das Produkt $S = A\bar{A}$ dann und nur dann vom Range r ist, wenn das gleiche von A gilt.

Ist A ein System von nicht verschwindender Determinante $|A|$, so existiert zweitens ein und nur ein System $A^{-1} = \frac{1}{A}$, welches mit A durch die Gleichung

(1) $$A \cdot \frac{1}{A} = \frac{1}{A} A = 1$$

zusammenhängt, und welches, wie bereits erwähnt, das zu A reziproke System genannt wird. Seine Determinante ist $\frac{1}{|A|}$.

Ist

$$C = AB$$

das Produkt zweier Systeme, und ist $|C| \gtrless 0$, so gilt dasselbe von $|A|$ und $|B|$; dann besteht für das zu C reziproke System die Gleichung

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{A},$$

weil für dieses System die Gleichung

$$1 = C \cdot \frac{1}{C} = AB \cdot \frac{1}{B} \frac{1}{A}$$

offenbar erfüllt ist. Und da man genau ebenso bei einem Produkte von mehr als zwei Faktoren schliefsen kann, so gilt der Satz:

> Ist ein System von nicht verschwindender Determinante aus mehreren Faktoren zusammengesetzt, so ist das reziproke System aus den reziproken Systemen der Faktoren, aber in der umgekehrten Reihenfolge zusammengesetzt.

Geht man ferner in den Definitionsgleichungen (1) für reziproke Systeme zu den konjugierten über und beachtet, dafs bei diesem Übergange das System 1 ungeändert bleibt, so ergibt sich

$$\overline{\left(\frac{1}{A}\right)} \bar{A} = \bar{A} \overline{\left(\frac{1}{A}\right)} = 1,$$

d. h. das zu $\frac{1}{A}$ konjugierte System $\overline{\left(\frac{1}{A}\right)}$ ist zu $\bar{A}$ reziprok, mufs also mit $\frac{1}{\bar{A}}$ übereinstimmen. Also ist

$$\frac{1}{\bar{A}} = \overline{\left(\frac{1}{A}\right)},$$

> d. h. das reziproke System des zu A konjugierten Systemes ist gleich dem konjugierten des zu A reziproken Systemes.

§ 4.

Wir hatten bis jetzt angenommen, dafs die Elemente a_{ik} der betrachteten Systeme A Zahlen sind. Wir werden uns aber hierauf nicht beschränken, sondern auch Systeme in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen, deren Elemente rationale Funktionen einer Variablen r sind. Gerade die hier abzuleitenden Resultate sind für die Anwendungen auf

die Theorie der Formen und der Formenscharen von fundamentaler Bedeutung.

Es seien also jetzt die n^2 Elemente a_{ik} zunächst **ganze Funktionen** von r, und es sei der höchste Grad dieser Funktionen gleich α, so daſs allgemein

$$a_{ik} = a_{ik}^{(0)} r^\alpha + a_{ik}^{(1)} r^{\alpha-1} + \cdots + a_{ik}^{(\alpha)} \tag{1}$$

gesetzt werden kann, wenn die Elemente $a_{ik}^{(\varrho)}$ Zahlen bedeuten; hier können gewisse aber nicht alle n^2 Koeffizienten $a_{ik}^{(0)}$ von r^α gleich Null sein. Dann kann unser System folgendermaſsen geschrieben werden

$$\begin{aligned} A = (a_{ik}) &= (a_{ik}^{(0)} r^\alpha) + (a_{ik}^{(1)} r^{\alpha-1}) + \cdots + (a_{ik}^{(\alpha)}) \\ &= A_0 r^\alpha + A_1 r^{\alpha-1} + \cdots + A_\alpha, \end{aligned} \tag{1a}$$

wo für die Potenzen r^k jetzt wieder die Diagonalsysteme zu setzen sind, deren Diagonalelemente r^k sind und wo die Systeme A_i durch die Gleichungen

$$A_0 = (a_{ik}^{(0)}),\ A_1 = (a_{ik}^{(1)}),\ \ldots\ A_\alpha = (a_{ik}^{(\alpha)})$$

bestimmt sind. Nach der Voraussetzung ist dann das System $A_0 \gtrless 0$, da ja nicht alle Elemente $a_{ik}^{(0)}$ verschwinden sollen. Alle diese Systeme sind also ganze Funktionen von r; die Zahl α soll der **Grad des Systemes** A heiſsen.

Sind jetzt

$$\begin{aligned} A &= A_0 r^\alpha + A_1 r^{\alpha-1} + \cdots + A_\alpha \\ B &= B_0 r^\beta + B_1 r^{\beta-1} + \cdots + B_\beta \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

mehrere derartige Systeme, so kann man mit ihnen wieder genau ebenso wie mit Zahlensystemen rechnen, wenn man die elementaren Rechenoperationen gemäſs den in § 1 und 2 dieser Vorlesung angegebenen Regeln definiert.

Speziell ergibt sich für das Produkt AB zweier solcher Systeme die Gleichung

$$\begin{aligned} AB &= (A_0 r^\alpha + A_1 r^{\alpha-1} + \cdots)(B_0 r^\beta + B_1 r^{\beta-1} + \cdots) \\ &= A_0 B_0 r^{\alpha+\beta} + (A_0 B_1 + A_1 B_0) r^{\alpha+\beta-1} + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

Also ist der Grad eines Produktes höchstens gleich der Summe der Grade seiner Faktoren, und er muſs genau gleich der Summe sein, wenn mindestens eine der beiden Determinanten $|A_0|$ und $|B_0|$ von Null verschieden ist. Sind aber jene beiden Determinanten gleich Null, so kann, wie auf S. 356 gezeigt wurde, das Produkt $A_0 B_0$ sehr wohl Null, also der Grad von AB kleiner als $\alpha + \beta$ sein.

Allgemeiner ist der Grad eines Produktes ABC gleich der Summe der Grade von A, B und C, wenn von den Koeffizienten A_0, B_0, C_0 der höchsten Potenzen von r mindestens zwei eine nicht verschwindende Determinante haben.

Ist die Determinante von A nicht identisch, d. h. nicht für variable Werte von r gleich Null, so existiert auch hier ein eindeutig bestimmtes reziprokes System zu A, welches wir wieder durch A^{-1} oder durch $\frac{1}{A}$ bezeichnen, und für welches die Gleichungen

$$A\frac{1}{A} = \frac{1}{A}A = 1$$

bestehen. Seine Elemente a'_{ik} sind die Unterdeterminanten von A dividiert durch $|A|$, also gebrochene rationale Funktionen von r.

Wir wollen im folgenden auch solche Systeme betrachten, deren Elemente gebrochene rationale Funktionen von r sind; wir wollen jetzt ein System A ganz oder gebrochen nennen, je nachdem seine Elemente sämtlich ganze Funktionen von r sind, oder auch nur eines von ihnen eine gebrochene Funktion von r ist.

Sind die Elemente $a_{ik}(r)$ gebrochene rationale Funktionen von r, so können sie bekanntlich in endlicher Umgebung einer beliebigen Stelle $(r = \alpha)$ in konvergente Potenzreihen entwickelt werden, deren jede höchstens eine endliche Anzahl negativer Potenzen von $r - \alpha$ enthält. Ist nun allgemein

$$(3)\qquad a_{ik}(r) = \frac{a_{ik}^{(-\varrho)}}{(r-\alpha)^\varrho} + \cdots + \frac{a_{ik}^{(-1)}}{r-\alpha} + a_{ik}^{(0)} + a_{ik}^{(1)}(r-\alpha) + \cdots,$$

so kann für eine endliche Umgebung jener Stelle das System $A = \big(a_{ik}(r)\big)$ folgendermaßen geschrieben werden

$$(3a)\quad A = \frac{A_{-\varrho}}{(r-\alpha)^\varrho} + \frac{A_{-(\varrho-1)}}{(r-\alpha)^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{A_{-1}}{r-\alpha} + A_0 + A_1(r-\alpha) + \cdots,$$

wo die Koeffizienten $A_\lambda = (a_{ik}^{(\lambda)})$ die aus den betreffenden Entwickelungskoeffizienten der rationalen Funktionen $a_{ik}(r)$ gebildeten Zahlensysteme sind.

Entwickeln wir analog die rationalen Funktionen $a_{ik}(r)$ in der Umgebung der Stelle $(r = \infty)$, d. h. für große Werte von r nach fallenden Potenzen von r, so erhalten wir analog aus den n^2 Reihen

$$(3b)\qquad a_{ik}(r) = a_{ik}^{(-\varrho)}r^\varrho + \cdots + a_{ik}^{(-1)}r + a_{ik}^{(0)} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{r} + \cdots \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die folgende, für genügend große Werte von r konvergente Entwickelung des rationalen Systemes $A = \big(a_{ik}(r)\big)$

$$(3c)\quad A = A_{-\varrho}r^\varrho + A_{-(\varrho-1)}r^{\varrho-1} + \cdots + A_{-1}r + A_0 + \frac{A_1}{r} + \cdots$$

In diesem weiteren Bereiche der rational gebrochenen Systeme haben nun die beiden Gleichungen

$$(4) \qquad AX = B \quad \text{und} \quad YA = B$$

wieder die eindeutig bestimmten Lösungen

$$X = \frac{1}{A} \cdot B \quad \text{und} \quad Y = B \cdot \frac{1}{A},$$

welche im allgemeinen voneinander verschieden sind.

Hier wollen wir nur noch einen für das Spätere sehr wichtigen Satz beweisen, welcher zeigt, wie nahe die Theorie der Systeme mit der Theorie der rationalen Funktionen verwandt ist. Es seien

$$(5) \qquad \begin{aligned} A &= A_0 r^\alpha + A_1 r^{\alpha-1} + \cdots + A_\alpha \\ B &= B_0 r^\beta + B_1 r^{\beta-1} + \cdots\cdots + B_\beta \end{aligned}$$

zwei Systeme, deren Grade in Bezug auf r gleich α und β sind, und es sei $\alpha \leqq \beta$; ferner besitze der Koeffizient A_0 von r^α eine von Null verschiedene Determinante. Dann kann man genau ebenso wie bei der Division ganzer Funktionen den Quotienten $B \cdot \frac{1}{A}$ in der Form schreiben

$$(6) \qquad B \cdot \frac{1}{A} = C + D \cdot \frac{1}{A},$$

wo

$$C = C_0 r^{\beta-\alpha} + C_1 r^{\beta-\alpha-1} + \cdots + C_{\beta-\alpha}$$

ein ganzes System vom Grade $\beta - \alpha$ und

$$D = D_0 r^{\alpha-1} + \cdots + D_{\alpha-1}$$

von niedrigerem als dem α^{ten} Grade in r ist. Auch hier wollen wir C den Quotienten und D den Rest der hinteren Division von B durch A nennen. Beide Systeme C und D sind hierbei eindeutig bestimmte ganze Systeme.

Um diesen Satz zu beweisen, multiplizieren wir die Gleichung (6) hinten mit A und setzen für A, B, C, D ihre Werte. Dann bestimmen sich die unbekannten Zahlensysteme C_i und D_k aus der Gleichung

$$(6\text{a}) \qquad B = CA + D,$$

welche ausgeschrieben so lautet

$$\begin{cases} B_0 r^\beta + B_1 r^{\beta-1} + \cdots + B_\beta = (C_0 r^{\beta-\alpha} + C_1 r^{\beta-\alpha-1} + \cdots)(A_0 r^\alpha + A_1 r^{\alpha-1} + \cdots) \\ \qquad\qquad + (D_0 r^{\alpha-1} + \cdots + D_{\alpha-1}). \end{cases}$$

Durch Ausführung der Multiplikation und Koeffizientenvergleichung ergeben sich für $C_0, C_1, \ldots C_{\beta-\alpha}$ die $\beta - \alpha + 1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} C_0 A_0 &= B_0 \\ C_1 A_0 + C_0 A_1 &= B_1 \\ C_2 A_0 + C_1 A_1 + C_0 A_2 &= B_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

Da die Determinante $|A_0| \gtrless 0$ ist, so bestimmen sich hieraus $C_0, C_1, \ldots C_{\beta-\alpha}$ eindeutig; man erhält nämlich

$$\begin{aligned} C_0 &= B_0 \cdot \frac{1}{A_0} \\ C_1 &= (B_1 - C_0 A_1) \frac{1}{A_0} \\ C_2 &= (B_2 - C_1 A_1 - C_0 A_2) \frac{1}{A_0} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

und aus der Gleichung

$$D = B - CA$$

wird auch D eindeutig bestimmt.

Genau ebenso zeigt man, daſs sich auch bei vorderer Division von B durch A eine eindeutig bestimmte Gleichung

$$\frac{1}{A} B = \bar{C} + \frac{1}{A} \bar{D} \tag{6b}$$

oder

$$B = A\bar{C} + \bar{D} \tag{6c}$$

ergibt, in welcher der Quotient $\bar{C}$ vom Grade $\beta - \alpha$ und der Rest $\bar{D}$ höchstens vom Grade $\alpha - 1$ ist.

Ergibt sich in der Gleichung (6a) $D = 0$, so heiſst A ein hinterer Teiler von B, weil dann $B = CA$ ist. Ergibt sich in (6c) $\bar{D} = 0$, so heiſst aus dem analogen Grunde A ein vorderer Teiler von B. Welche Bedingungen hierfür notwendig und hinreichend sind, werden wir später darlegen.

Ist die Determinante des Systemes $A(r)$

$$|A(r)| = |A_0 r^\alpha + A_1 r^{\alpha-1} + \cdots + A_\alpha|$$

nicht identisch Null, ist aber $|A_0| = 0$, so kann man die Division von B durch A nicht in der hier angegebenen Weise ausführen, wohl aber dann, wenn man an Stelle von r eine neue Variable einführt.

Ist nämlich $|A(r)|$ nicht identisch Null, so gibt es sicher einen Wert r_0 von r, für welchen $|A(r_0)| \gtrless 0$ ist. Ersetzt man dann den Parameter r durch die neue Variable r', welche mit r durch die umkehrbare Substitution

$$r = r_0 + \frac{1}{r'}, \quad r' = \frac{1}{r - r_0} \tag{7}$$

zusammenhängt, so wird

$$A(r) = A\left(r_0 + \frac{1}{r'}\right) = A(r_0) + A'(r_0)\frac{1}{r'} + \frac{A''(r_0)}{2!}\cdot\frac{1}{r'^2} + \cdots + \frac{A^{(\alpha)}(r_0)}{\alpha!}\cdot\frac{1}{r'^\alpha}.$$

Das neue System

$$\mathfrak{A}(r') = r'^\alpha A(r) = r'^\alpha A(r_0) + r'^{\alpha-1} A'(r_0) + \cdots + \frac{1}{\alpha!} A^{(\alpha)}(r_0), \tag{8}$$

welches sich von $A(r)$ nur durch den Faktor r'^{α} unterscheidet, ist also ebenfalls eine Funktion α^{ten} Grades von r', in welcher jetzt aber der Koeffizient $A(r_0)$ von r'^{α} eine von Null verschiedene Determinante hat. Setzt man ebenso

$$\mathfrak{B}(r') = r'^{\beta} B(r), \tag{8a}$$

so kann man bei dem Quotienten

$$\mathfrak{B}(r') \cdot \frac{1}{\mathfrak{A}(r')} = B(r) \frac{1}{A(r)} \cdot r'^{\beta-\alpha}$$

die Division in der oben angegebenen Weise ausführen. Ergibt sich dann der Divisionsrest $\mathfrak{D}(r') = 0$, so besteht die Gleichung

$$\mathfrak{B}(r') = \mathfrak{C}(r')\,\mathfrak{A}(r'), \tag{9}$$

in der $\mathfrak{C}(r')$ in r' vom Grade $\beta - \alpha$ ist; setzt man also

$$\mathfrak{C}(r') = r'^{\beta-\alpha} C(r),$$

so wird $C(r)$ ebenfalls eine ganze Funktion von r, und durch Division mit r'^{β} ergibt sich

$$B(r) = C(r)\,A(r). \tag{9a}$$

Besteht umgekehrt die Gleichung (9), so folgt durch Multiplikation mit r'^{β} die Gleichung (9a); man kann also diese Methode stets anwenden, um die Teilbarkeit von $B(r)$ durch $A(r)$ zu untersuchen, falls nur nicht $|A(r)|$ identisch verschwindet.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Die Teilbarkeit und die Äquivalenz der Systeme. — Klassen äquivalenter Systeme. — Die Invarianten für die äquivalenten Systeme. — Erste Definition der Äquivalenz. — Der Rang der Systeme. — Der Rang ist die einzige Invariante für die äquivalenten Systeme. — Die ganzen und die gebrochenen Systeme der Bereiche (1) und (r). — Der Diagonalteiler eines Systemes. — Zweite Definition der Äquivalenz. — Die Determinantenteiler und die Elementarteiler eines Systemes. — Die reduzierten Systeme. — Zwei Systeme sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Determinantenteiler oder ihre Elementarteiler gleich sind.

§ 1.

Wir gehen jetzt dazu über, den durch das Multiplikationsprinzip gegebenen Zusammenhang der Systeme untereinander zu untersuchen und sie auf Grund dieser Beziehungen in Klassen äquivalenter Systeme einzuteilen. Wie aber bereits in der fünften Vorlesung hervorgehoben wurde, muſs die Definition äquivalenter Systeme je nach dem Zwecke der gerade vorliegenden Untersuchung eine verschiedene sein. Wir werden von der einfachsten und umfassendsten Klasseneinteilung allmählich zu den engeren und komplizierteren übergehen und jedesmal versuchen, diejenigen Invarianten zu finden, deren Gleichheit für zwei Systeme die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daſs sie auf Grund der gerade geltenden Definition in dieselbe Klasse gehören.

Wir gehen bei dieser Betrachtung zunächst von der einfachsten Definition der Teilbarkeit eines Systemes durch ein anderes aus und gründen auf diese die erste Definition der Äquivalenz:

Sind zwei Systeme A und B so beschaffen, daſs zwischen ihnen eine Gleichung

(1) $$B = PAQ$$

besteht, wo P und Q ganz beliebige Systeme bedeuten, so heiſst A ein Teiler oder Divisor von B, oder B ein Vielfaches oder Multiplum von A.

Ist sowohl B ein Vielfaches von A, als auch A ein Vielfaches von B, besteht also auſser der Gleichung (1) eine zweite Relation

(1a) $$A = RBS,$$

so heiſsen A und B äquivalent; diese Beziehung soll durch

(1b) $$A \sim B$$

ausgedrückt werden. Alle nach dieser Definition äquivalenten Systeme sollen in eine und dieselbe Klasse gerechnet werden.

Es ist klar, daſs bei dieser Definition die drei Fundamentalsätze für die Äquivalenz bestehen, welche wir bereits auf S. 72 ausgesprochen hatten:

1. Ist $A \sim B$, so ist auch $B \sim A$.
2. Jedes System ist sich selbst äquivalent.
3. Sind zwei Systeme A und B einem dritten C äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent.

Ist A ein Teiler von B, und besitzen in der dann bestehenden Gleichung $B = PAQ$ die beiden Multiplikatoren P und Q von Null verschiedene Determinanten, so ist sicher auch B ein Teiler von A, d. h. in diesem Falle sind A und B äquivalent; denn unter dieser Voraussetzung existieren ja die reziproken Systeme P^{-1} und Q^{-1}; und durch Auflösung der obigen Gleichung nach A ergibt sich die andere

$$A = P^{-1} B Q^{-1}.$$

Wählen wir für A speziell das System $A = 0$, dessen n^2 Elemente sämtlich Null sind, so ist offenbar jedes Multiplum $B = P.0.Q$ ebenfalls gleich Null, und ein System B ist daher dann und nur dann äquivalent Null, wenn es gleich Null ist.

Geht man ferner in der Gleichung (1) zu den abgeleiteten Systemen über, so folgen aus ihr die n Gleichungen

(2) $$B^{(\varrho)} = P^{(\varrho)} A^{(\varrho)} Q^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1, 2, \dots n);$$

und falls $B \sim A$ ist, ergeben sich aus (1a) die weiteren

(2a) $$A^{(\varrho)} = R^{(\varrho)} B^{(\varrho)} S^{(\varrho)}.$$

Man erhält also sofort den Satz:

Ist A ein Teiler von B, so ist auch jedes abgeleitete System $A^{(\varrho)}$ ein Teiler des entsprechenden abgeleiteten Systemes $B^{(\varrho)}$. Ist speziell $A \sim B$, so ist auch für je zwei abgeleitete Systeme gleicher Ordnung $A^{(\varrho)} \sim B^{(\varrho)}$.

Mit Hilfe dieser Sätze können wir nun gleich eine notwendige Bedingung dafür angeben, daſs A ein Teiler von B bezw. dafür, daſs $A \sim B$ ist.

Ist nämlich B ein Multiplum von A, und ist A vom Range r, so ist $A^{(r+1)} = 0$, und aus der dann bestehenden Gleichung (2) für

$\varrho = r + 1$ folgt weiter, daſs auch $B^{(r+1)} = P^{(r+1)}.0.Q^{(r+1)} = 0$, daſs also B höchstens vom Range r sein kann.

Ist also B ein Multiplum von A, so ist der Rang von B gleich oder kleiner als der Rang von A.

Ist speziell $B \sim A$, so ist der Rang von B höchstens gleich dem Range vom A, aber auch umgekehrt der Rang von A höchstens gleich dem Range von B, und hieraus folgt der Satz:

Äquivalente Systeme haben gleichen Rang.

Alle Systeme derselben Klasse haben somit denselben Rang; der Rang ist also eine Invariante für alle äquivalenten Systeme.

Wir wollen aber jetzt weiter zeigen, daſs zwei beliebige Systeme von gleichem Range auch stets äquivalent sind, daſs also der Rang der Systeme für diese Art der Äquivalenz die einzige Invariante ist. Zu diesem Zwecke beweisen wir, daſs jedes System vom Range r äquivalent ist dem sogenannten reduzierten Systeme E_r von gleichem Range, nämlich demjenigen Diagonalsysteme

$$E_r = \begin{pmatrix} 1, \ddots & 0, & 0, \ldots 0 \\ 0, & \ddots 1, & 0, \ldots 0 \\ 0, \ldots & 0, & 0, \ddots\; 0 \\ 0, \ldots & 0, & 0, \;\ddots 0 \end{pmatrix},$$

dessen r erste Diagonalelemente gleich Eins sind, während die $n - r$ letzten Null sind. Ist das bewiesen, so folgt ja nach dem dritten Fundamentalsatze der Äquivalenz aus den beiden Äquivalenzen

$$A \sim E_r, \quad B \sim E_r$$

in der Tat

$$A \sim B.$$

Wir werden die Richtigkeit dieses Satzes dadurch beweisen, daſs wir für ein beliebiges System A vom Range r zwei Multiplikatoren P und Q von nicht verschwindender Determinante angeben, für welche

$$PAQ = E_r$$

ist. Da dann nämlich auch $A = P^{-1} E_r Q^{-1}$ ist, so ist hiermit unsere Behauptung in ihrem vollen Umfange bewiesen, und wir kennen auſserdem zwei Multiplikatoren P und Q von nicht verschwindender Determinante, für welche $PAQ = E_r$ ist. Ist dann ferner auch B von demselben Range, so kennen wir auch zwei ebensolche Multiplikatoren, für welche $RBS = E_r$ ist. Dann folgt endlich aus der Gleichung

$$PAQ = RBS$$

durch Auflösung nach A die Gleichung

$$A = (P^{-1}R).B.(SQ^{-1}),$$

d. h. wir kennen dann auch zwei Faktoren $P^{-1}R$ und SQ^{-1}, welche B in A überführen, und ebenso geht A durch Komposition mit $R^{-1}P$ und QS^{-1} in B über.

§ 2.

Den Beweis für die Äquivalenz eines beliebigen Systemes A vom Range r mit dem zugehörigen Diagonalsysteme E_r führen wir jetzt folgendermaſsen: Wir komponieren A vorn und hinten mit gewissen geeignet gewählten „Elementarsystemen“ von nicht verschwindender Determinante und zeigen, daſs man hierdurch A in E_r überführen kann. Bezeichnen wir dann das Produkt aller vorderen Kompositionssysteme durch P, das der hinteren durch Q, so sind ja $|P|$ und $|Q|$ nicht gleich Null, und aus der Gleichung

$$PAQ = E_r$$

folgt in der Tat die Richtigkeit unserer Behauptung.

Als Elementarsysteme wollen wir in diesem Falle analog, wie dies bereits auf S. 146 geschah, die folgenden drei Klassen von Systemen ansehen:

I. Die $(n-1)$ sogenannten Permutations- oder Vertauschungssysteme

$$P_k = \begin{pmatrix} 0, & 0, \dots 0, & -1, & 0, \dots 0 \\ 0, & 1, \dots 0, & 0, & 0, \dots 0 \\ \vdots & & & & \\ 1, & 0, \dots 0, & 0, & 0, \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, \dots 0, & 0, & 0, \dots 1 \end{pmatrix} \quad (k = 2, 3, \dots n),$$

von denen allgemein P_k dadurch aus dem Einheitssysteme hervorgeht, daſs man seine erste Zeile mit der negativ genommenen k^{ten} vertauscht, d. h. durch die Vertauschung $(H_1, -H_k)$. Es ist daher allgemein $|P_k| = 1$, da durch diese Vertauschung die Determinante des Einheitssystemes nicht geändert wird.

II. Das System

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, \dots 0 \\ 0, & 1, & 0, \dots 0 \\ 0, & 0, & 1, \dots 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & 0, \dots 1 \end{pmatrix};$$

seine Determinante ist ebenfalls gleich Eins.

III. Die Systeme

$$T_t = \begin{vmatrix} t, & 0, \dots & 0 \\ 0, & 1, \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0, & 0, \dots & 1 \end{vmatrix},$$

wenn t eine beliebige von Null verschiedene Konstante bedeutet. Es ist $|T_t| = t$.

Zu diesen Systemen können wir auch das allgemeinere

$$W_t = \begin{vmatrix} 1, & t, & 0, \dots & 0 \\ 0, & 1, & 0, \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & 0, \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

hinzunehmen, wie aus der Kompositionsgleichung

$$W_t = T_t \,.\, W_1 \,.\, T_{\frac{1}{t}}, \tag{2}$$

d. h. aus

$$\begin{pmatrix} 1, & t, & \vdots \\ 0, & 1, & \vdots \\ \cdots & \cdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t, & 0, & \vdots \\ 0, & 1, & \vdots \\ \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1, & \vdots \\ 0, & 1, & \vdots \\ \cdots & \cdots & \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{t}, & 0, & \vdots \\ 0, & 1, & \vdots \\ \cdots & \cdots & \end{vmatrix} \tag{2a}$$

unmittelbar folgt. Ebenso können wir auch das konjugierte System

$$\overline{W}_t = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ t, & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

hinzurechnen, wo hier, wie im folgenden ein in dieser Weise abgekürzt geschriebenes System durch die dem Einheitssysteme entsprechenden Elemente zu einem Systeme von n^2 Elementen ergänzt werden soll. Geht man nämlich in der obigen Gleichung (2a) zu den konjugierten Systemen über, so folgt nach dem auf S. 359 bewiesenen Satze

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ t, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

während

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = W_1 P_2 W_1$$

ist.

Genau ebenso, wie dies auf S. 148 flgd. gezeigt wurde, beweisen wir nun die Richtigkeit der folgenden Kompositionsgleichungen, welche zeigen, in welcher Weise ein beliebiges System

$$A = (V_1, V_2, \dots V_n) = (H_1, H_2, \dots H_n)$$

durch hintere Komposition mit einem dieser Elementarsysteme geändert wird,

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
A P_k &= (V_k,\ V_2, \ldots V_{k-1},\ -V_1, \ldots V_n) \\
A W_t &= (V_1,\ V_2 + t V_1,\ V_3, \ldots\ldots\ldots V_n) \\
A T_t &= (t V_1,\ V_2, \ldots\ldots V_n),
\end{aligned}
$$

und unter Hinzuziehung des konjugierten Systemes $\overline{W}_t$ erhält man die analogen Formeln für die vordere Komposition

$$
(4a) \qquad \begin{aligned}
P_k A &= (-H_k,\ H_2, \ldots H_{k-1},\ H_1, \ldots H_n) \\
\overline{W}_t A &= (H_1,\ H_2 + t H_1,\ H_3, \ldots\ldots\ldots H_n) \\
T_t A &= (t H_1,\ H_2, \ldots\ldots H_n).
\end{aligned}
$$

Hätte man die Kompositionen statt mit P_k mit dem reziproken System $P_k^3 = P_k^{-1}$ ausgeführt, so hätte sich dieselbe Vertauschung der beiden Parallelreihen ergeben; nur erhielte dann jedesmal die andere Reihe das negative Vorzeichen. Durch vordere oder hintere Komposition mit $P_k^2 = P_k . P_k$ endlich werden nur H_1 und H_k bez. V_1 und V_k ohne Vertauschung *zugleich* mit -1 multipliziert.

Aus den letzten Gleichungen der beiden Systeme (4) und (4a) in Verbindung mit den soeben gemachten Bemerkungen ergibt sich, dafs das System A in ein äquivalentes übergeht, wenn man seine erste Reihe mit einer beliebigen Parallelreihe unter gleichzeitiger Vorzeichenänderung einer der beiden Reihen vertauscht. Hieraus folgt leicht, dafs man überhaupt durch Vertauschung von zwei beliebigen Parallelreihen (V_k, V_l) oder (H_k, H_l) miteinander wieder zu einem äquivalenten System gelangt. In der Tat erhält man bei Beachtung von (4) und (4a) leicht die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
A \quad P_k T_{-1} P_l T_{-1} P_k T_{-1} &= (V_1, \ldots V_l, \ldots V_k, \ldots), \\
T_{-1} P_k T_{-1} P_l T_{-1} P_k A \quad &= (H_1, \ldots H_l, .\ .\ H_k, \ldots);
\end{aligned}
$$

denn jene Elementarkompositionen bewirken in beiden Fällen der Reihe nach die folgenden Veränderungen

$V_1, \ldots$	$V_k, \ldots$	$V_l \ldots$	$H_1, \ldots$	$H_k, \ldots$	$H_l, \ldots$
V_k	$-V_1$	V_l	$-H_k$	H_1	H_l
$-V_k$	$-V_1$	V_l	H_k	H_1	H_l
V_l	$-V_1$	V_k	$-H_l$	H_1	H_k
$-V_l$	$-V_1$	V_k	H_l	H_1	H_k
$-V_1$	V_l	V_k	$-H_1$	H_l	H_k
V_1	V_l	V_k	H_1	H_l	H_k

Da man endlich zwei beliebige Zeilen H_l und H_k an die Stelle von H_1 und H_2 bringen, dann durch vordere Komposition mit $\overline{W}_t$, H_k durch

$H_k + tH_i$ ersetzen und endlich die neuen Zeilen H_i, $H_k + tH_i$ wieder durch Vertauschung mit H_1 und H_2 an ihre frühere Stelle bringen kann, und da das Analoge für die Vertikalreihen gilt, so geht A in ein äquivalentes System über, wenn man zu einer beliebigen Reihe H_k (oder V_k) das t-fache einer beliebigen Parallelreihe H_i (oder V_i) addiert; genau ebenso folgt, daſs man ohne A im Sinne der Äquivalenz zu ändern, eine beliebige Reihe von A mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren kann, während die anderen Reihen ungeändert bleiben.

Wir können also jetzt den folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Ein System A geht in ein äquivalentes über, wenn man

1. zwei Parallelreihen miteinander vertauscht,
2. zu einer Reihe ein beliebiges Multiplum einer Parallelreihe addiert,
3. eine beliebige Zeile (oder Kolonne) mit einer von Null verschiedenen Zahl multipliziert.

Durch diese Umformungen kann man nun ein System $A = (a_{ik})$ in ein System E_r von gleichem Range überführen. In der Tat können wir das erste Element a_{11} von A von vornherein gleich Eins voraussetzen, falls nicht das ganze System $A = 0$ ist. Denn wäre das noch nicht der Fall, und ist $a_{11} \gtrless 0$, so könnten wir die erste Kolonne durch a_{11} dividieren, wodurch a_{11} in 1 übergeht. Ist dagegen $a_{11} = 0$, so können wir irgend ein von Null verschiedenes Element a_{gk} an die erste Stelle bringen und dasselbe hierauf zu Eins machen. Ist aber $a_{11} = 1$, so können wir durch die gestatteten Transformationen alle übrigen Elemente a_{1i} und a_{k1} von V_1 und H_1 auſser a_{11} zu Null machen. Ist nämlich z. B. a_{1i} ein von Null verschiedenes Element von H_1, so kann man dasselbe dadurch zu Null machen, daſs man das a_{1i}-fache der Kolonne V_1 von V_i abzieht.

Behandelt man nun in dem so sich ergebenden äquivalenten Systeme

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & \ldots 0 \\ 0, & a'_{22}, & \ldots a'_{2n} \\ \vdots & & \\ 0, & a'_{n2}, & \ldots a'_{nn} \end{pmatrix}$$

das innere System von $(n-1)$ Zeilen und Kolonnen genau ebenso und fährt mit dieser Transformation so lange fort, als überhaupt noch in dem betreffenden inneren Systeme ein von Null verschiedenes Element vorhanden ist, so erhält man zuletzt ein äquivalentes System, welches die Form des reduzierten Systemes E_r besitzt. Da aber der

Rang dieses zu A äquivalenten Systemes ebenfalls gleich r sein muſs, so ist dasselbe gleich E_r; es besteht also der Satz:

Zwei Systeme A und B sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie gleichen Rang haben; ist dies der Fall, so kann man stets zwei Multiplikatoren P und Q von nicht verschwindender Determinante so bestimmen, daſs $PAQ = B$ ist.

Hieraus folgt unmittelbar der allgemeinere Satz:

Ein System B ist dann und nur dann ein Vielfaches von A, wenn sein Rang nicht gröſser ist als der von A. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man zwei Multiplikatoren T und U so bestimmen, daſs $B = TAU$ ist.

Daſs diese Bedingung erfüllt sein muſs, damit B ein Vielfaches von A ist, wurde bereits auf S. 368 bewiesen. Um nun zu zeigen, daſs sie notwendig und hinreichend ist, nehmen wir an, es sei B vom Range ϱ, A vom Range r und es sei $\varrho \leqq r$.

Sind nun die zwei Paare von Multiplikatoren (P, Q) und (R, S) so gewählt, daſs ihre Determinanten von Null verschieden sind, und daſs

$$PAQ = E_r, \quad RBS = E_\varrho$$

ist, so folgt aus der ersten Gleichung durch hintere Multiplikation mit E_ϱ, da offenbar $E_r E_\varrho = E_\varrho$ ist,

$$PAQE_\varrho = RBS,$$

denn der gemeinsame Wert beider Seiten ist ja E_ϱ; und durch Auflösung dieser Gleichung nach B ergibt sich endlich

$$B = (R^{-1}P)A(QE_\varrho S^{-1}),$$

womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

§ 3.

Wir wenden uns jetzt zu einer engeren Definition der Teilbarkeit und der Äquivalenz, bei welcher die Multiplikatoren P und Q, bezw. R und S, in den Gleichungen (1) und (1a) des § 1 nicht mehr beliebig sind, sondern so gewählt sein sollen, daſs ihre Elemente entweder ganze Zahlen oder ganze Funktionen von r sind Diese Betrachtungen werden uns zu den wichtigsten Invarianten der Systeme, nämlich zu ihren sogenannten Elementarteilern führen. Ehe wir zu dieser Untersuchung übergehen, wollen wir kurz die Systeme mit ganzen und gebrochenen Elementen und ihre Teiler behandeln.

Es sei zuerst $A = (a_{ik})$ ein ganzzahliges System, und d sei der größte gemeinsame Teiler aller seiner n^2 Elemente a_{ik}, so daß allgemein

$$a_{ik} = d a_{ik}^{(0)}$$

ist, und die n^2 Elemente $a_{ik}^{(0)}$ keinen ihnen allen gemeinsamen Teiler haben. Bezeichnen wir dann, wie bisher, mit d ebenfalls das Diagonalsystem mit den Diagonalelementen d, so besteht für A die Gleichung

$$A = d A_0 = A_0 d,$$

wo $A_0 = (a_{ik}^{(0)})$ ein sogenanntes primitives ganzzahliges System, d. h. ein solches bedeutet, dessen n^2 Elemente keinen allen gemeisamen Teiler enthalten. Ist speziell $A = 0$, so soll auch d gleich Null angenommen werden.

Ist ferner

$$A(r) = \big(a_{ik}(r)\big)$$

ein System, dessen n^2 Elemente beliebige ganze rationale Funktionen von r sind, und ist $d(r)$ der größte gemeinsame Teiler aller dieser n^2 Funktionen, so besteht die analoge Gleichung

$$A(r) = d(r) A_0(r) = A_0(r) d(r),$$

wo ebenfalls $A_0(r)$ ein primitives System und $d(r)$ das dem gleichbezeichneten Divisor $d(r)$ entsprechende Diagonalsystem bedeutet.

In beiden Fällen kann man den größten gemeinsamen Divisor d bezw. $d(r)$ der n^2 Elemente a_{ik} bezw. $a_{ik}(r)$ entweder successive durch das *Euklid*ische Verfahren zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers bestimmen, oder man kann jedes Element von A oder $A(r)$ in seine Primzahlen bezw. Linearfaktoren zerlegen und jeden dieser Faktoren in den Teiler d so oft aufnehmen, als er in jedem der n^2 Elemente mindestens enthalten ist.

Jetzt möge A ein System sein, dessen Elemente a_{ik} beliebige rationale Brüche sind; wir denken uns dieselben von vornherein auf ihren Generalnenner gebracht und setzen

$$a_{ik} = \frac{\mathfrak{z}_{ik}}{\mathfrak{n}};$$

dann besitzen die n^2 ganzen Zahlen $\mathfrak{z}_{ik}$ keinen allen gemeinsamen Teiler mit dem Generalnenner $\mathfrak{n}$, wohl aber können sie noch einen oder mehrere gemeinsame Primfaktoren haben, welche nicht in $\mathfrak{n}$ enthalten sind. Ist nun $\mathfrak{z}$ der größte gemeinsame Teiler aller dieser n^2 Zahlen $\mathfrak{z}_{ik}$, und setzen wir

$$\mathfrak{z}_{ik} = \mathfrak{z} \cdot a_{ik}^{(0)},$$

so erhält man jetzt genau wie vorher für die n^2 gebrochenen Elemente a_{ik} von A die folgende Darstellung

$$a_{ik} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}} a_{ik}^{(0)} = d a_{ik}^{(0)} \qquad \left(d = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}}\right),$$

wo die n^2 ganzen Zahlen $a_{ik}^{(0)}$ wieder keinen gemeinsamen Teiler besitzen, d. h. es ergibt sich auch hier eine Gleichung

$$A = d A_0 = A_0 d,$$

wo $A_0 = (a_{ik}^{(0)})$ wiederum ein primitives ganzzahliges System bedeutet. Auch hier wollen und können wir den rationalen Bruch $d = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}}$ als den größten gemeinsamen Teiler der n^2 rationalen Brüche a_{ik} bezeichnen.

Ist $A(r) = \big(a_{ik}(r)\big)$ ein System von n^2 rationalen gebrochenen Funktionen von r, und ist ebenso wie vorher

$$a_{ik}(r) = \frac{\mathfrak{z}_{ik}(r)}{\mathfrak{n}(r)}$$

die Darstellung der Elemente mit Hilfe ihres Generalnenners $\mathfrak{n}(r)$, so kann man auch hier

$$\mathfrak{z}_{ik}(r) = \mathfrak{z}(r)\, a_{ik}^{(0)}(r),$$

also

$$a_{ik}(r) = \frac{\mathfrak{z}(r)}{\mathfrak{n}(r)} a_{ik}^{(0)}(r) = d(r)\, a_{ik}^{(0)}(r) \qquad \left(d(r) = \frac{\mathfrak{z}(r)}{\mathfrak{n}(r)}\right)$$

setzen, wenn $\mathfrak{z}(r)$ den größten gemeinsamen Teiler aller Zähler $\mathfrak{z}_{ik}(r)$ bedeutet. Dann besteht für dieses System $A(r)$ ebenfalls eine Gleichung

$$A(r) = d(r) A_0(r),$$

wo $d(r) = \frac{\mathfrak{z}(r)}{\mathfrak{n}(r)}$ den größten gemeinsamen Teiler der n^2 rationalen Brüche $a_{ik}(r)$ bedeutet, und $A_0(r) = \big(a_{ik}^{(0)}(r)\big)$ ein primitives System ganzer rationaler Funktionen ist. Da man sowohl den Generalnenner $\mathfrak{n}(r)$ als auch den größten gemeinsamen Divisor $\mathfrak{z}(r)$ aller Zähler durch das *Euklid*ische Verfahren bestimmen kann, so kann man also auch in diesem Falle den Teiler $d(r)$ auf rationalem Wege, d. h. ohne Kenntnis der Linearfaktoren der Elemente $a_{ik}(r)$ finden.

Wir erhalten so den folgenden Satz:

> Jedes System A, dessen Elemente rationale Zahlen oder rationale Funktionen einer Variablen sind, kann auf eine einzige Art in ein Produkt
>
> $$A = d A_0$$
>
> zerlegt werden, dessen erster Faktor d ein Diagonalsystem, dessen zweiter ein primitives ganzes System ist. Das Diagonalsystem d soll der Diagonalteiler von A genannt werden; derselbe kann stets auf rationalem Wege bestimmt werden.

Bei der nun folgenden Untersuchung können und wollen wir die Systeme (a_{ik}) mit rationalen Zahlenelementen und die Systeme $(a_{ik}(r))$, deren Elemente rationale Funktionen von r mit beliebigen konstanten Koeffizienten sind, gemeinsam behandeln; wir werden nämlich sehen, daſs die für das eine und die für das andere Gebiet sich ergebenden Resultate wörtlich übereinstimmen. Wir wollen zunächst einige im folgenden gebrauchte Begriffe für beide Bereiche gemeinsam definieren.

Die Gesamtheit aller rationalen Zahlen einerseits und die Gesamtheit aller rationalen Funktionen anderseits bilden je einen Rationalitätsbereich (siehe fünfzehnte Vorlesung § 2), welchen wir wieder durch (1) bezw. durch (r) bezeichnen, während wir die Gesamtheit aller ganzen Zahlen bezw. aller ganzen Funktionen den zugehörigen Integritätsbereich nennen und ihn durch [1] bezw. durch $[r]$ bezeichnen.

Jede rationale (ganze oder gebrochene) Zahl a läſst sich auf eine einzige Weise als ein Produkt

$$a = \pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_h^{k_h}$$

von Primzahlen darstellen (siehe S. 251), wo aber jetzt die Exponenten k_i auch negative ganze Zahlen sein können, wenn a nicht ganz ist. Genau ebenso kann jede rationale (ganze oder gebrochene) Funktion $a(r)$ von r auf eine einzige Weise als ein Produkt

$$a(r) = e(r-\alpha_1)^{k_1}(r-\alpha_2)^{k_2}\dots(r-\alpha_h)^{k_h}$$

von Linearfaktoren dargestellt werden, wo e eine Konstante bedeutet, und wo die Exponenten positive oder (falls $a(r)$ nicht ganz ist) auch negative ganze Zahlen bedeuten können. Wir werden diese einfachsten Bestandteile p bezw. $(r-\alpha)$, aus denen in jenen beiden Fällen alle Elemente von (1) bezw. von (r) zusammengesetzt werden können, die **Primfaktoren** für jene beiden Brüche nennen. Ein Element des betrachteten Bereiches, welches gar keinen Primteiler enthält, soll eine **Einheit** genannt werden. Der Bereich (1) besitzt also nur die beiden Einheiten $+1$ und -1, im Bereiche (r) sind dagegen alle von Null verschiedenen Konstanten e Einheiten. Eine Einheit ist auch dadurch vollständig charakterisiert, daſs sowohl sie selbst als auch ihr reziproker Wert eine ganze Gröſse des Bereiches ist.

Ein System $P = (p_{ik})$, dessen Elemente einem der Bereiche (1) oder (r) angehören, heiſst **ganz**, wenn alle seine Elemente ganze Gröſsen desselben Bereiches sind. Dies ist, wie wir sahen, dann und nur dann der Fall, wenn sein Diagonalteiler ganz ist. Ist der Diagonalteiler eine Einheit, so nannten wir das System **primitiv**. Ist das System P ganz, und ist seine Determinante eine Einheit, unitas (d. h.

für den Bereich (1) gleich ± 1 oder für (r) gleich einer von Null verschiedenen Konstanten), so soll P ein unimodulares System genannt werden.

Für diese Systeme besteht nun der Satz:

> Ein ganzes System P ist dann und nur dann unimodular, wenn sein reziprokes $\frac{1}{P}$ ebenfalls ganz ist.

Sind nämlich die beiden Systeme P und $\frac{1}{P} = P^{-1}$ beide ganz, so gilt dasselbe von ihren Determinanten $|P|$ und $\frac{1}{|P|}$, und dies ist dann und nur dann möglich, wenn $|P|$ eine Einheit ist. Ist aber umgekehrt $|P|$ eine Einheit und das System P ganz, so ist das reziproke System $\frac{1}{P}$ ebenfalls ganz, weil seine Elemente gleich den Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von P dividiert durch $|P|$ also ebenfalls ganze Größen sind.

Wir erkennen endlich ohne weiteres, daß das Produkt beliebig vieler unimodularer Systeme wieder unimodular ist.

§ 4.

Wir wollen nun für die Teilbarkeit eines Systemes durch ein anderes und für die Äquivalenz zweier Systeme die beiden folgenden engeren Definitionen aufstellen:

> Sind zwei ganze oder gebrochene Systeme A und B des Bereiches (1) oder des Bereiches (r) so beschaffen, daß zwischen ihnen eine Gleichung
>
> $$B = PAQ$$
>
> besteht, in der P und Q zwei ganze Systeme desselben Bereiches bedeuten, so heißt A ein Teiler von B oder B ein Vielfaches von A.
>
> Ist B ein Vielfaches von A, zugleich aber auch A ein Vielfaches von B, so heißen A und B äquivalent ($A \sim B$). Alle nach dieser Definition äquivalenten Systeme sollen wieder in eine und dieselbe Klasse gerechnet werden.

Offenbar gelten auch bei dieser engeren Definition die drei auf S. 367 aufgeführten Fundamentalsätze der Äquivalenz.

Ist ferner A ein Teiler von B, und sind die in der Gleichung $B = PAQ$ auftretenden Multiplikatoren P und Q speziell unimodulare Systeme, so folgt aus der dann ebenfalls bestehenden Gleichung

$$A = P^{-1}BQ^{-1},$$

in der auch P^{-1} und Q^{-1} ganze Systeme sind, dafs auch B ein Teiler von A, dafs also $A \sim B$ ist.

Es sei jetzt A ein System mit dem Diagonalteiler d, also $A = dA_0$, und es sei B ein Vielfaches von A. Da das Diagonalsystem d mit jedem anderen vertauschbar ist, so folgt aus der Gleichung $B = PAQ$

$$B = P(dA_0)Q = d \cdot (PA_0 Q) = d \cdot G,$$

wo G ein ganzes System bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt also, dafs der Diagonalteiler von B ein Vielfaches des Diagonalteilers von A sein mufs. Ist ferner auch A ein Vielfaches von B, ist also $B \sim A$, so sind die Diagonalteiler beider Systeme oder die gröfsten gemeinsamen Teiler der Elemente von B und derjenigen von A einander gleich. Es bestehen also die beiden Sätze:

Ist B ein Multiplum von A, so ist auch der Diagonalteiler von B ein Multiplum des Diagonalteilers von A.

Äquivalente Systeme haben gleiche Diagonalteiler.

Zu jedem Systeme A gehören n abgeleitete Systeme

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots A^{(n)},$$

deren erstes gleich A selbst, deren letztes gleich der Determinante $|A|$ ist. Jedes dieser Systeme besitzt einen Diagonalteiler; wir erhalten somit n Diagonalteiler

$$d_1, d_2, \dots d_n,$$

von denen der erste gleich dem Diagonalteiler d von A, der letzte gleich der Determinante $|A|$ ist. Diese Zahlengröfsen $d_1, d_2, \dots d_n$ der Bereiche (1) oder (r) sind die gröfsten gemeinsamen Teiler aller Determinanten der ersten, der zweiten, ... der n^{ten} Ordnung, welche aus den n^2 Elementen des Systemes (a_{ik}) gebildet werden können; auch sie können somit durch das *Euklid*ische Verfahren zur Aufsuchung des gröfsten gemeinsamen Teilers, also auch für Systeme des Bereiches (r) auf rationalem Wege, ohne Kenntnis der Linearfaktoren jener Determinanten gefunden werden. Allgemein soll die Gröfse d_i der **Determinantenteiler i^{ter} Ordnung des Systemes A** oder auch der Diagonalteiler des abgeleiteten Systemes $A^{(i)}$ genannt werden. Ist speziell $A^{(i)} = 0$, so ist auch $d_i = 0$, und das Gleiche gilt dann für alle folgenden Determinantenteiler $d_{i+1}, \dots d_n$.

Es sei nun B ein Multiplum von A; dann folgt aus der dann bestehenden Gleichung

$$B = PAQ$$

durch Übergang zu den abgeleiteten Systemen

$$B^{(i)} = P^{(i)} A^{(i)} Q^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

wo auch die abgeleiteten Systeme $P^{(i)}$ und $Q^{(i)}$ ganz sind. Hieraus folgt, daſs nicht nur der Diagonalteiler von B ein Vielfaches des Diagonalteilers von A sein muſs, sondern daſs jeder Determinantenteiler i^{ter} Ordnung von B ein Vielfaches des entsprechenden Determinantenteilers von A sein muſs. Sind A und B äquivalent, so müssen demnach ihre Determinantenteiler gleicher Ordnung einander gleich sein. Es gelten also die Sätze:

Ist B ein Vielfaches von A, so sind auch alle Determinantenteiler von B Multipla der entsprechenden Determinantenteiler von A.

Äquivalente Systeme haben gleiche Determinantenteiler.

§ 5.

Wir werden am Schlusse dieser Vorlesung zeigen, daſs die am Ende des vorigen Abschnittes gefundene notwendige Bedingung für die Teilbarkeit eines Systemes durch ein anderes noch durch eine schärfere ersetzt werden kann. Dagegen beweisen wir jetzt, daſs die soeben als notwendig erkannte Äquivalenzbedingung, nämlich die Gleichheit der Determinantenteiler, auch die hinreichende Bedingung ist.

Zum Beweise dieser Tatsache brauchen wir wieder nur zu zeigen, daſs jedes System A mit gegebenen Determinantenteilern $d_1, d_2, \ldots d_n$ durch Komposition mit geeignet gewählten unimodularen Elementarsystemen in ein reduziertes System R übergeführt werden kann, welches durch diese Determinantenteiler eindeutig bestimmt ist; denn hieraus allein folgt ja wegen der Eigenschaften unimodularer Systeme, daſs ein solches System A äquivalent R ist, und daſs demnach zwei Systeme A und B mit denselben Determinantenteilern einander äquivalent sind, weil sie demselben reduzierten Systeme R äquivalent sind.

Als unimodulare Elementarsysteme, zunächst für den Bereich (1), können und wollen wir in diesem Falle ansehen:

1. die $n-1$ Vertauschungssysteme P_k auf S. 369,
2. das System
$$W_1 = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, \ldots \\ 0, & 1, & 0, \ldots \\ 0, & 0, & 1, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \end{pmatrix},$$
3. das System
$$T_{-1} = \begin{pmatrix} -1, & 0, \ldots & \\ & 0, & 1, \ldots \\ \vdots & & \\ & 0, & 0, \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen dann genau wie auf S 67, dafs man zu diesen die Systeme

$$W_{\pm t} = \begin{vmatrix} 1, & \pm t, & 0, \dots \\ 0, & 1, & 0, \dots \\ 0, & 0, & 1, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

hinzunehmen kann, wenn man unter t eine beliebige aber ganze positive Zahl versteht, da diese Systeme durch die Elementarsysteme P_k und W_1 darstellbar sind. Endlich sind die zu P_k und W_1 reziproken Systeme P_k^3 und W_{-1} hiernach ebenfalls gleich Produkten jener Elementarsysteme.

Genau ebenso wie auf S. 372 folgt nun aus den Veränderungen, welche ein ganzzahliges System durch vordere oder hintere Komposition mit den unimodularen Systemen P_k und $W_{\pm t}$ erfährt, der Satz:

> Ein System A mit rationalen Zahlenelementen geht in ein äquivalentes über, wenn man
>
> 1. zwei Parallelreihen miteinander vertauscht,
> 2. zu einer Reihe (Zeile oder Kolonne) ein ganzzahliges positives oder negatives Multiplum einer Parallelreihe addiert,
> 3. irgend eine Reihe (Zeile oder Kolonne) mit -1 multipliziert.
>
> Durch diese Veränderungen kann nun das System (a_{ik}) in ein äquivalentes Diagonalsystem
>
> (1) $$(e_i) = \begin{vmatrix} e_1, & 0, & \dots 0 \\ 0, & e_2, & \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0, & 0, & \dots e_n \end{vmatrix}$$
>
> übergeführt werden, dessen Diagonalelemente e_i sämtlich nicht negative rationale Zahlen sind, von denen jede ein Teiler der folgenden ist.

Wir können bei dem Beweise dieses Fundamentalsatzes gleich annehmen, dafs das Anfangselement a_{11} in A positiv und nicht gröfser als alle übrigen Elemente ist. Wäre das nämlich nicht der Fall, und wäre etwa a_{ik} seinem absoluten Werte nach kleiner als a_{11}, so könnte ja a_{ik} durch zwei Reihenvertauschungen an die Stelle von a_{11} gebracht und hierauf, falls es negativ sein sollte, durch Multiplikation von H_1 mit -1 positiv gemacht werden.

Ferner können wir gleich annehmen, daſs a_{11} ein gemeinsamer Teiler aller Elemente von H_1 und von V_1 ist. Wäre nämlich a_{11} z. B. in a_{1i} nicht enthalten, so können wir ja von der Vertikalreihe V_i das t-fache von V_1 abziehen und die ganze Zahl t so bestimmen, daſs das nun an die Stelle von a_{1i} tretende Element $a'_{1i} = a_{1i} - ta_{11}$ positiv und kleiner als a_{11} ist; dieses kann dann durch Kolonnenvertauschung wieder an die Stelle von a_{11} gebracht werden. Durch jede derartige Operation wird nun a_{11} verkleinert, und man zeigt leicht, daſs diese Verkleinerung nach einer endlichen Anzahl solcher Veränderungen aufhören muſs. Ist nämlich d der gröſste gemeinsame Teiler aller n^2 Elemente des ursprünglichen Systemes (a_{ik}), so sind alle seine Elemente a_{ik} ganzzahlige Multipla von d; und da dieser Teiler bei jeder unimodularen Transformation ungeändert bleibt, so sind auch alle verkleinerten Anfangselemente Multipla von d. Da somit a_{11} immer um ein ganzzahliges Multiplum von d, also mindestens um d selbst verkleinert wird und anderseits nicht unter d herabsinken kann, so muſs man zuletzt zu einem äquivalenten Systeme gelangen, in welchem alle Elemente von H_1 und V_1 ganzzahlige Multipla von a_{11} sind. Ist dies der Fall, so kann man alle Elemente $a_{12}, \ldots a_{1n}$ und $a_{21}, \ldots a_{n1}$, dadurch zu Null machen, daſs man geeignete Multipla von V_1 der Reihe nach von $V_2, \ldots V_n$ und hierauf geeignete Multipla von H_1 der Reihe nach von $H_2, \ldots H_n$ abzieht.

In dem so sich ergebenden äquivalenten Systeme

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \ldots 0 \\ 0, & a'_{22}, & \ldots a'_{2n} \\ \vdots & & \\ 0, & a'_{n2}, & \ldots a'_{nn} \end{pmatrix}$$

kann man es weiter durch die gestatteten Umformungen erreichen, daſs a_{11} auch in allen $(n-1)^2$ Elementen a'_{ik} als gemeinsamer Teiler enthalten ist. In der Tat, wäre dies z. B. für a'_{ik} nicht der Fall, so kann man H_i zu H_1 addieren, so daſs die erste Zeile jetzt gleich

$$(a_{11}, a_{i2}, \ldots a'_{ik}, \ldots a'_{in})$$

wird. Dann kann man durch Subtraktion eines geeigneten Vielfachen der ersten Kolonne von der k^{ten} a'_{ik} in H_1 positiv und kleiner machen als a_{11} und dieses kleinere Element wieder an die Stelle von a_{11} bringen. So kann man fortfahren und a_{11} wieder so lange verkleinern, bis es als Teiler in allen Elementen von H_1 enthalten ist. So erhält man nach einer endlichen Anzahl von Umformungen ein äquivalentes System von der Form (2), in welchem nun a_{11} ein gemeinsamer Teiler aller $(n-1)^2$ Elemente a'_{ik} ist.

Formen wir jetzt dieses innere System (a_{ik}) in genau derselben Weise um, bis in H_2 und V_2 nur noch das Anfangsglied a_{22} vorhanden ist und dieses ein Teiler aller anderen Elemente ist, so wird hierdurch der aus H_1 und V_1 bestehende Rand in keiner Weise geändert. Fährt man in derselben Weise fort, solange überhaupt noch von Null verschiedene Elemente in dem betreffenden inneren Teile vorhanden sind, so erhält man zuletzt ein äquivalentes Diagonalsystem

$$\begin{pmatrix} e_1, & 0, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0, & e_2, & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & \ldots\ldots & e_r, \ldots & 0 \\ 0, & \ldots & 0, 0, \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & \ldots & 0, 0, \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

in welchem von den positiven Diagonalelementen jedes ein Teiler des folgenden ist.

Bezeichnet man auch die $(n-r)$ letzten Diagonalglieder dieses Systemes, welche sämtlich gleich Null sind, durch

$$e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots e_n,$$

so erkennt man, dafs das so bestimmte reduzierte System

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} e_1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & e_2, & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \ldots & e_n \end{pmatrix}$$

in der Tat die oben bei (1) angegebene Eigenschaft hat, dafs jedes seiner Diagonalglieder ein Teiler der folgenden ist. Dies haben wir soeben bewiesen, wenn jene Diagonalelemente alle positiv sind. Damit unsere Definition der reduzierten Systeme allgemeine Giltigkeit habe, wollen wir ein für allemal festsetzen, dafs die Zahl Null durch jede von Null verschiedene Zahl und auch durch die Zahl Null selbst teilbar genannt werden soll; diese Festsetzung steht mit der allgemeinen Definition der Teilbarkeit nicht im Widerspruch, weil ja die Gleichung $a \cdot b = c$ auch dann die ganzzahlige Lösung $a = 0$ besitzt, wenn $c = 0$ und $b \gtrless 0$, oder wenn $c = b = 0$ ist.

Da jedes Element e_{i+1} in (3) ein Vielfaches des zunächst vorhergehenden ist, so können wir setzen

$$(4) \qquad e_{i+1} = e_i s_i,$$

wo jedes s_i eine bestimmte ganze Zahl ist. Nur die erste unter ihnen

$$e_1 = \varepsilon_1$$

kann eine gebrochene Zahl sein, wenn das ursprüngliche System (a_{ik}) aus Brüchen besteht. So ergibt sich für jene n Diagonalglieder die Darstellung

$$\begin{aligned} &e_1 = \varepsilon_1 \\ &e_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &e_i = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_i \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &e_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{5}$$

wo die Zahlen $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots \varepsilon_n$ sämtlich gleich Null anzunehmen sind.

Wir wissen nun, daſs durch die gestatteten Transformationen des ursprünglichen Systemes seine n Determinantenteiler

$$d_1, d_2, \ldots d_n \tag{6}$$

nicht geändert werden, daſs also das soeben gefundene Diagonalsystem (e_i) dieselben Determinantenteiler (6) besitzt, wie das ursprüngliche System.

Anderseits erkennt man aber sehr leicht, daſs die Determinantenteiler dieses Diagonalsystemes (3) bezw. gleich

$$e_1, \quad e_1 e_2, \ldots, e_1 e_2 \ldots e_n \tag{7}$$

sind. In der Tat verschwinden ja in diesem Systeme alle Unterdeterminanten einer beliebigen k^{ten} Ordnung, deren Zeilen und Kolonnen nicht gleiche Indizes haben, weil in ihnen mindestens eine Reihe lauter Nullen enthält. Dagegen besitzt jede einer Kombination

$$(H_{i_1}, \ldots H_{i_k} \,|\, V_{i_1}, \ldots V_{i_k})$$

entsprechende Unterdeterminante k^{ter} Ordnung die Diagonalglieder

$$e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots e_{i_k};$$

alle Unterdeterminanten einer bestimmten k^{ten} Ordnung sind also gleich

$$e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k},$$

wenn $(i_1, \ldots i_k)$ alle Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ zu je k durchläuft, bei denen $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ ist. Alle diese Produkte sind nun offenbar durch das erste unter ihnen

$$e_1 e_2 \ldots e_k$$

teilbar, weil stets e_{i_1} durch e_1, e_{i_2} durch $e_2, \ldots e_{i_k}$ durch e_k teilbar ist; und damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Da somit die n Gleichungen bestehen

$$(8)\qquad d_1 = e_1,\quad d_2 = e_1 e_2,\quad d_3 = e_1 e_2 e_3, \ldots d_n = e_1 e_2 \ldots e_n,$$

aus denen sich durch Auflösung

$$(8a)\qquad e_1 = d_1,\quad e_2 = \frac{d_2}{d_1},\quad e_3 = \frac{d_3}{d_2}, \cdots e_n = \frac{d_n}{d_{n-1}}$$

ergibt, so sind die Elemente des reduzierten Diagonalsystemes (e_i) durch die Determinantenteiler des ursprünglichen Systemes A eindeutig bestimmt. Sind also A und B zwei Systeme, deren Determinantenteiler $d_1, d_2, \ldots d_n$ übereinstimmen, so sind sie wirklich äquivalent, denn beide sind dann demselben reduzierten Systeme $(e_i) = \left(\frac{d_i}{d_{i-1}}\right)$ äquivalent.

Wir wollen im folgenden die n Elemente $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ des zu A äquivalenten reduzierten Systemes die n Elementarteiler von A nennen, und wir wollen sie in dieser Reihenfolge als den ersten, zweiten, ... n^{ten} Elementarteiler von A bezeichnen. Die Elementarteiler von A hängen dann mit den Determinantenteilern dieses Systemes durch die Gleichungen (8a) zusammen, können also ebenso einfach wie jene berechnet werden. Dann können wir das jetzt gefundene Resultat in dem Satze aussprechen:

> Zwei Systeme A und B des Bereiches (1) sind dann und nur dann äquivalent, wenn ihre Elementarteiler beziehlich gleich sind. Ist das der Fall, so kann man stets zwei solche unimodulare Systeme P und Q finden, daſs
>
> $$B = PAQ,\quad A = P^{-1} B Q^{-1}$$
>
> ist.

Wörtlich derselbe Satz gilt nun auch für zwei Systeme $A(r)$ und $B(r)$ des Bereiches (r), und er wird auch wörtlich ebenso bewiesen.

Wir brauchen in diesem Falle den Beweis nur für ganze Systeme zu führen. Sind nämlich $A(r)$ und $B(r)$ gebrochene Systeme, so können sie nach S. 378 überhaupt nur dann äquivalent sein, wenn ihre Diagonalteiler gleich sind. Ist dies aber der Fall, und ist $A = dA_0$, $B = dB_0$, so können wir statt ihrer die primitiven Systeme A_0 und B_0 untersuchen; und sind diese äquivalent, so gilt offenbar das gleiche für die beiden Systeme A und B.

Auch hier zeigen wir nun, daſs jedes System A durch vordere und hintere Komposition mit unimodularen Elementarsystemen auf die reduzierte Form

$$(9)\qquad \begin{Bmatrix} e_1(r), & 0, & \dots & 0 \\ 0, & e_2(r), & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0, & 0, & \dots & e_n(r) \end{Bmatrix}$$

gebracht werden kann, in welcher jedes Diagonalelement $e_i(r)$ ein Teiler des nächstfolgenden $e_{i+1}(r)$ ist. Da dann diese „Elementarteiler" wieder mit den Determinantenteilern $d_1(r), \dots d_n(r)$ von $A(r)$ durch die Gleichungen (8a) zusammenhängen, also für zwei Systeme $A(r)$ und $B(r)$ identisch sind, welche dieselben Determinantenteiler haben, so folgt auch in diesem Falle, daſs zwei solche Systeme dann und nur dann äquivalent sind, wenn ihre Determinantenteiler oder ihre Elementarteiler beziehlich gleich sind.

Als unimodulare Elementarsysteme sehen wir hier die folgenden an:

1. die $(n-1)$ Vertauschungssysteme P_k;
2. die Systeme

$$W_t = \begin{vmatrix} 1, & t, & 0, \dots \\ 0, & 1, & 0, \dots \\ 0, & 0, & 1, \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

wo jetzt t eine beliebige ganze Funktion von r d. h. eine ganze Gröſse des Bereiches (r) ist;

3. das System

$$T_C = \begin{vmatrix} C, & 0, \dots \\ 0, & 1, \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

wo C eine von Null verschiedene Konstante d. h. eine Einheit des Bereiches (r) ist.

Dann zeigt man wieder, daſs ein System in ein äquivalentes übergeht, wenn man zwei Parallelreihen miteinander vertauscht, oder zu einer Reihe ein Vielfaches einer Parallelreihe addiert, oder wenn man endlich eine Reihe mit einer Konstanten multipliziert; denn alle diese Veränderungen entsprechen der vorderen oder hinteren Komposition mit gewissen Elementarsystemen.

Um nun durch diese Umformungen ein beliebiges ganzes System

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots a_{nn} \end{Bmatrix}$$

des Bereiches (r) in die Form (9) überzuführen, verkleinern wir jetzt den Grad des Anfangselementes $a_{11}(r)$ so lange, bis alle übrigen Elemente von H_1 und V_1 gleich Null geworden sind. Zunächst bringen wir nämlich das Element niedrigsten Grades $a_{ik}(r)$ durch Reihenvertauschungen an die erste Stelle. Ist dann ein Element $a_{1i}(r)$ oder $a_{k1}(r)$ von H_1 oder von V_1 noch nicht durch a_{11} teilbar, so subtrahieren wir von V_i das $t(r)$-fache von V_1 und bestimmen die ganze Funktion $t(r)$ so, daſs das neue Element

$$a'_{1i} = a_{1i} - t a_{11}$$

von niedrigerem Grade wird als a_{11}. Alsdann bringen wir dieses Element an die erste Stelle und fahren so lange fort, den Grad des Anfangsgliedes zu verkleinern, bis sich ein äquivalentes System von der Form (2) auf S. 381 ergibt. Dann kann man genau auf die a. a. O. angegebene Weise den Grad von a_{11} noch weiter verkleinern, bis in dem äquivalenten Systeme

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & 0, & \ldots 0 \\ 0, & a'_{22}, & a'_{23}, & \ldots a'_{2n} \\ 0, & a'_{32}, & a'_{33}, & \ldots a'_{3n} \\ \vdots & & & \\ 0, & a'_{n2}, & a'_{n3}, & \ldots a'_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{11} ein gemeinsamer Teiler aller Elemente a'_{ik} ist. Dividieren wir in diesem Systeme die erste Zeile noch durch den Koeffizienten der höchsten Potenz von r in a_{11}, so erhalten wir ein äquivalentes System, in welchem der Koeffizient der höchsten Potenz von r in $a_{11}(r)$ gleich Eins ist.

Formen wir nun das innere System $\big(a'_{ik}(r)\big)$ in gleicher Weise um, wodurch H_1 und V_1 nicht mehr geändert werden, so geht das System A zuletzt in ein äquivalentes System (9) über, und damit ist unsere oben aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen.

§ 6.

Sind zwei Systeme A und B einander nach der zweiten engeren Definition äquivalent, so gilt offenbar dasselbe, wenn man die erste Definition auf S. 367 zu Grunde legt. Haben also A und B dieselben Elementarteiler, so sind sie auch von gleichem Range. Dies folgt auch unmittelbar daraus, daſs in einem Systeme vom Range r die r ersten Determinantenteiler und somit auch die r ersten Elementarteiler von Null verschieden sind, während seine $n - r$ letzten Determinantenteiler und die entsprechenden Elementarteiler alle Null sind.

Für die Untersuchung der Äquivalenz zweier Systeme kann man ebensogut die Determinantenteiler wie die Elementarteiler als charakteristische Invarianten einführen, weil die einen durch die anderen eindeutig bestimmt sind. Ganz anders stellt sich aber diese Frage, wenn man die Bedingungen dafür aufsucht, daſs ein System B ein Vielfaches eines anderen A ist. In diesem Falle müssen allerdings, wie auf S. 379 bewiesen wurde, die Determinantenteiler von B Multipla der entsprechenden Determinantenteiler von A sein; ist dies aber der Fall, so braucht B noch keineswegs ein Multiplum von A zu sein. Dagegen gilt hier der Satz:

> Ein System B ist dann und nur dann ein Vielfaches von A, wenn seine Elementarteiler Multipla der entsprechenden Elementarteiler von A sind.

Sind die Elementarteiler e_i' von B Vielfache der Elementarteiler e_i von A, bestehen also die n Gleichungen

$$(1) \qquad e_i' = g_i e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo die g_i ganze Gröſsen sind, so sind auch die Determinantenteiler d_i' von B Multipla der Determinantenteiler d_i von A, wie aus den n Gleichungen

$$d_i' = e_1' \ldots e_i' = (g_1 \ldots g_i)(e_1 \ldots e_i) = G_i d_i \qquad (i = 1, \ldots n)$$

unmittelbar folgt. Dagegen folgt aus den n Gleichungen

$$(2) \qquad d_i' = G_i d_i$$

noch keineswegs das Bestehen der Gleichungen (1); denn dazu müſste jede der n ganzen Gröſsen $G_1, \ldots G_n$ ein Teiler der folgenden sein, wie aus den Gleichungen

$$e_i' = \frac{d_i'}{d_{i-1}'} = \frac{G_i}{G_{i-1}} \cdot \frac{d_i}{d_{i-1}} = \frac{G_i}{G_{i-1}} \cdot e_i$$

unmittelbar hervorgeht. Nur aus diesem Grunde werden wir im folgenden die n Elementarteiler eines Systemes als die ursprünglichen wesentlichen Invarianten gegenüber den n Determinantenteilern in den Vordergrund stellen.

Daſs das System B in der Tat ein Multiplum von A ist, wenn seine Elementarteiler e_i' ganze Vielfache der Elementarteiler e_i von A sind, kann sehr leicht bewiesen werden. Ist nämlich

$$B \sim (e_i'), \quad A \sim (e_i),$$

so kann man vier unimodulare Systeme P, Q, R, S so bestimmen, daſs

$$(3) \qquad PBQ = (e_i'), \quad RAS = (e_i)$$

ist. Bestehen nun die n Gleichungen $e_i' = g_i e_i$, welche in die eine Gleichung

(4) $$(e_i') = (g_i)(e_i)$$

zwischen den beiden Diagonalsystemen (e_i') und (e_i) und dem ganzen Diagonalsysteme (g_i) zusammengezogen werden können, so ergeben sich aus jenen Gleichungen (3) und (4) die folgenden

$$B = P^{-1}(e_i')\,Q^{-1} = P^{-1}(g_i)\,(e_i)\,Q^{-1} = P^{-1}(g_i)\,RAS\,Q^{-1} = \overline{P}A\overline{Q},$$

wo die ganzen Systeme $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ durch die Gleichungen

$$\overline{P} = P^{-1}(g_i)\,R, \quad \overline{Q} = S\,Q^{-1}$$

bestimmt sind; und damit ist die erste Hälfte unseres Satzes bewiesen.

Etwas weniger einfach ist der Beweis der Tatsache, daſs auch umgekehrt von den beiden zu B und zu A gehörigen Diagonalsystemen (e_i') und (e_i) das erste ein ganzes Vielfaches des zweiten ist, wenn B ein Multiplum von A ist. Wir geben für diese Tatsache einen ganz besonders einfachen Beweis, welcher von Herrn *Frobenius* herrührt.

Offenbar können wir bei diesem Beweise $P = 1$ annehmen; denn ist gezeigt, daſs für einen beliebigen ganzen Multiplikator Q aus der Gleichung

(4) $$B = A\,Q$$

die Teilbarkeit des Diagonalsystemes (e_i') durch das System (e_i) folgt, so gilt derselbe Satz auch für die vordere Komposition mit einem ganzen Systeme, wie man sofort erkennt, wenn man in der obigen Gleichung zu den konjugierten Systemen übergeht. Also gilt dann derselbe Satz auch für die allgemeine Gleichung $B = PAQ$.

Es seien nun R und S beliebige unimodulare Systeme. Wir schreiben dann die Gleichung (4) in der Form

(4a) $$RB = (RAS)\cdot(S^{-1}Q)$$

und wählen die Multiplikatoren R und S so, daſs

$$RAS = (e_i)$$

wird. Es sei nun

(5) $$RB = \ddot{B}, \quad S^{-1}Q = H = (h_{ik}) = (H_1, H_2, \ldots H_n),$$

wenn $H_1, H_2, \ldots H_n$ wieder die Horizontalreihen des Systemes H bedeuten; dann besitzt $\ddot{B}$ dieselben Elementarteiler wie B, und H ist ein ganzes System. Dann ergibt sich aus (4) die Gleichung

(6) $$\ddot{B} = (e_i)\,H = (e_i h_{ik}) = (e_1 H_1, e_2 H_2, \ldots e_n H_n).$$

Um nun die Determinantenteiler von $\overline{B}$ zu finden, betrachten wir eine beliebige Determinante ϱ^{ten} Grades

$$(7) \qquad D'_\varrho = |\, e_{i_1} H_{i_1},\ e_{i_2} H_{i_2},\ \dots\ e_{i_\varrho} H_{i_\varrho} \,|$$

von $\overline{B}$, welche aus den Horizontalreihen $\overline{H}_{i_1}, \overline{H}_{i_2}, \dots \overline{H}_{i_\varrho}$ dieses Systemes gebildet ist. Ist $i_1 < i_2 < \cdots < i_\varrho$, so ist $i_1 \geqq 1$, $i_2 \geqq 2, \dots i_\varrho \geqq \varrho$; daher ist e_{i_1} durch e_1, e_{i_2} durch $e_2, \dots e_{i_\varrho}$ durch e_ϱ teilbar. Dividiert man also in D'_ϱ $\overline{H}_{i_1}$ durch $e_1, \dots \overline{H}_{i_\varrho}$ durch e_ϱ, so wird D'_ϱ durch das Produkt $e_1 e_2 \dots e_\varrho = d_\varrho$ geteilt, und der Quotient

$$(7\text{a}) \qquad D_\varrho = \frac{D'_\varrho}{d_\varrho} = \left| \frac{e_{i_1}}{e_1} H_1,\ \frac{e_{i_2}}{e_2} H_2,\ \dots\ \frac{e_{i_\varrho}}{e_\varrho} H_\varrho \right|$$

wird eine **ganze** Determinante ϱ^{ter} Ordnung, die sich von D'_ϱ dadurch unterscheidet, daſs allgemein e_{i_k} durch $\frac{e_{i_k}}{e_k}$ ersetzt ist.

Da nun der gröſste gemeinsame Teiler aller Determinanten D'_ϱ gleich dem ϱ^{ten} Determinantenteiler von B, also gleich d'_ϱ ist, so ist der gröſste gemeinsame Teiler aller Determinanten $\frac{D'_\varrho}{d_\varrho}$ offenbar gleich $\frac{d'_\varrho}{d_\varrho}$.

Bildet man in genau derselben Weise alle Determinanten $(\varrho - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(8) \qquad D'_{\varrho-1} = |\, e_{i_1} H_{i_1},\ e_{i_2} H_{i_2},\ \dots\ e_{i_{\varrho-1}} H_{i_{\varrho-1}} \,|$$

von $\overline{B}$ und dividiert sie alle durch das Produkt $d_{\varrho-1} = e_1 e_2 \dots e_{\varrho-1}$, so ist der gröſste gemeinsame Teiler der so sich ergebenden ganzen Determinanten

$$(8\text{a}) \qquad D_{\varrho-1} = \frac{D'_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}} = \left| \frac{e_{i_1}}{e_1} H_{i_1},\ \frac{e_{i_2}}{e_2} H_{i_2},\ \dots\ \frac{e_{i_{\varrho-1}}}{e_{\varrho-1}} H_{i_{\varrho-1}} \right|$$

offenbar gleich $\frac{d'_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}}$. Denken wir uns aber irgend eine der Unterdeterminanten ϱ^{ter} Ordnung $\frac{D'_\varrho}{d_\varrho}$ in (7a) nach ihrer **letzten** Horizontalreihe entwickelt, so ist jede der dann als Koeffizienten auftretenden Unterdeterminanten $(\varrho - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung offenbar eine der Determinanten $D_{\varrho-1} = \frac{D'_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}}$ in (8a).

Also ist jede Determinante $\frac{D'_\varrho}{d_\varrho}$ homogen und linear mit ganzen Koeffizienten durch die Determinanten $\frac{D'_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}}$ darstellbar, mithin auch durch ihren gemeinsamen Teiler $\frac{d'_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}}$ teilbar. Hieraus folgt endlich,

dafs der gröfste gemeinsame Teiler $\frac{d_\varrho}{d_\varrho}$ aller Determinanten $\frac{D'_\varrho}{d_\varrho}$ durch $\frac{d'_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}}$ teilbar, dafs also der Quotient

$$\frac{d'_\varrho}{d_\varrho} : \frac{d'_{\varrho-1}}{d_{\varrho-1}} = \frac{e'_\varrho}{e_\varrho}$$

eine ganze Zahl g_ϱ ist, und hiermit ist jener wichtige Satz in seinem vollen Umfange bewiesen.

Wir wollen im folgenden zunächst die Natur der Elementarteiler genauer untersuchen, welche durch die letzten Betrachtungen als die wichtigsten Invarianten der Determinantentheorie in den Vordergrund getreten sind. Wir werden sehen, dafs in ihren einfachsten Eigenschaften die wichtigsten und tiefstliegenden Sätze der Determinantentheorie und ihrer mannigfachen Anwendungen in den verschiedensten Teilen der Mathematik enthalten sind.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.







